Universidad de la República
Facultad de Ingeniería
IMERL

Soluciones examen ecuaciones diferenciales

Ejercicio 1 Resolver $\begin{cases} \ddot{x} - 2\dot{x} + x = t + e^t \\ x(0) = -2 \\ \dot{x}(0) = 3 \end{cases}$.

Sugerencia: Notar que $x_{p1}(t) = \frac{1}{2}t^2e^t$ *es solución de* $\ddot{x} - 2\dot{x} + x = e^t$.

Primero buscamos todas las soluciones a la ecuación homogénea: $\ddot{x}-2\dot{x}+x=0$. Para eso estudiamos el polinomio característico $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$ cuyas raíces son $\lambda = 1$ doble. De esto se sigue que todas las soluciones de la ecuación homogénea son de la forma $x_H(t) = C_1e^t + C_2te^t$. Ahora buscamos una solución particular, x_p, de $\ddot{x} - 2\dot{x} + x = t + e^t$. Por la sugerencia dada, basta con buscar una solución x_{p2} de la ecuación $\ddot{x} - 2\dot{x} + x = t$ pues luego nos sirve $x_p(t) = x_{p1}(t) + x_{p2}(t)$. Ahora probando con un polinomio de grado 1 genérico se ve que $x_{p2}(t) = t+2$ es solución. En resumen, cualquier solución de la ecuación de la letra es de la forma

$$x(t) = x_H(t) + x_p(t) = C_1e^t + C_2te^t + \frac{1}{2}t^2e^t + t + 2$$

La condición $x(0) = -2$ implica $C_1+2 = -2$ por lo cual $C_1 = -4$. La condición $\dot{x}(0) = 3$ implica $C_1+C_2+1 = 3$ por lo cual $C_2 = 6$.

Ejercicio 2 Encontrar la solución general y dibujar el diagrama de fase para las siguientes ecuaciones:

a)
$$\dot{\chi} = \begin{pmatrix} -7 & 10 \\ -5 & 9 \end{pmatrix}\chi$$

b)
$$\dot{\chi} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\chi$$

Para la parte *a*), observamos que

$$\begin{pmatrix} -7 & 10 \\ -5 & 9 \end{pmatrix} = 28\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{14}+8}{5} & \frac{-\sqrt{14}+8}{5} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\sqrt{14}+1 & 0 \\ 0 & \sqrt{14}+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5\sqrt{14} & -8\sqrt{14}+14 \\ -5\sqrt{14} & 8\sqrt{14}+14 \end{pmatrix}.$$

Para simplificar, llamemos $a = 1+\sqrt{14}$ y $b = 1-\sqrt{14}$ a los valores propios, entonces la solución general, con condición inicial (x_0, y_0), es

$$x(t) = 28\left[8\sqrt{14}(-e^{bt} + e^{at}) + 14(e^{bt} + e^{at})\right]x_0 + 10\sqrt{14}(e^{bt} - e^{at})y_0,$$

$$y(t) = -5\sqrt{14}(e^{bt} - e^{at})x_0 + \left[8\sqrt{14}(e^{bt} - e^{at}) + 14(e^{bt} + e^{at})\right]y_0.$$

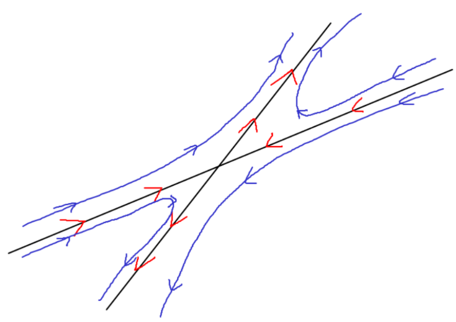

Figura 1: Diagrama de fase para el sistema *a*).

En la parte b), vemos que la matriz está en su forma de Jordan, por lo que podríamos aplicar la teoría en este caso, de todos modos podemos resolverla de manera más directa.
La segunda ecuación del sistema es $\dot{y} = y$, de donde la solución es $y(t) = y_0 e^t$. Luego, la primera ecuación queda $\dot{x} = x + y_0 e^t$, por lo que, buscando una solución homogénea y una particular llegamos a $x(t) = e^t(x_0 + y_0 t)$.

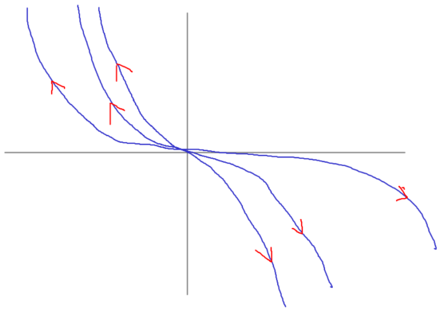

Figura 2: Diagrama de fase para el sistema b).

Ejercicio 3 Estudiar la estabilidad en el origen de:

$$\begin{cases} \dot{x} = -\frac{x^3}{2} + 2xy^2 \\ \dot{y} = -y^3 \end{cases}$$

Veamos que la función $V(x,y) = x^2 + 3y^2$ cumple el segundo teorema de Liapunov. Es claro que $(0,0)$ es un mínimo estricto de $V(x,y)$. Por otro lado, si $\phi(t)$ es una solución, entonces

$$\dot{V} = \nabla V \cdot \dot{\phi} = -x^4 + 4x^2y^2 - 6y^4.$$

Luego, si $(x,y) \in B((0,0),\epsilon) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : ||(x,y)|| < \epsilon\}$, entonces $x^4 < \epsilon^4$, $x^2y^2 < \epsilon^4$ e $y^4 < \epsilon^4$, por lo que

$$\begin{aligned} \dot{V} &< -\epsilon^4 + 4\epsilon^4 - 6\epsilon^4 \\ &= -3\epsilon^4 \\ &< 0. \end{aligned}$$

Entonces, por el segundo teorema de Liapunov, deducimos que $(0,0)$ es asintóticamente estable.

Ejercicio 4 Resolver

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, \quad (t,x) \in (0,+\infty) \times (0,L) \\ u(0,x) = \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) + 3\sin\left(\frac{-5\pi x}{L}\right) \\ u(t,0) = u(t,L) = 0, \quad t \in [0,+\infty) \end{cases}$$

Utilizando separación de variables para buscar soluciones de la forma $u(x,t) = T(t)X(x)$ se ve que $u_k(x,t) := A_k e^{-\left(\frac{k\pi x}{L}\right)^2 t} \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right)$ satisface todos los requerimientos salvo la condición en $u(0,x)$. Sin embargo, haciendo combinaciones lineales de soluciones también tengo soluciones, es por eso que

$$e^{-\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 t} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) - 3e^{-\left(\frac{5\pi}{L}\right)^2 t} \sin\left(\frac{5\pi x}{L}\right)$$

también es solución pero además satisface la condición en $u(0,x)$, resolviendo el problema.

Ejercicio 5 Sea la ecuación

$$\begin{cases} \dot{x} = -y^2 x \\ \dot{y} = x^2 y \end{cases}$$

Justificar que las soluciones maximales tienen intervalo maximal $\mathbb{R}$. Enunciar teoremas utilizados.

Primero observamos que los puntos en los ejes coordenados $\{(x,0) : x \in \mathbb{R}\}$ y $\{(0,y) : y \in \mathbb{R}\}$ son puntos estacionarios. Esto nos dice que si tenemos una condición inicial en un cuadrante, entonces la solución, a futuro y pasado, estará siempre en el mismo cuadrante, puesto que por el *teorema de Picard*, las soluciones no se cruzan.

Por otro, trabajando en polares, tenemos que $\varphi(\theta) = -\frac{r_0^3}{3}\left(sen^3\theta, cos^3\theta\right)$, donde r_0 es el radio inicial, es solución a la ecuación diferencial. Por lo tanto las soluciones están a una distancia constante del origen.
Dada una condición inicial (r_0, θ_0), sea $K_n = \{(x, y, t) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} : ||(x, y)|| \leq r_0, |t| \leq n\}$. Luego, este conjunto es un compacto en $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$, entonces por escape de compactos sabemos que la solución debe salir de K_n, pero por la observación anterior la norma de la solución es constante, de donde la solución no se escapa por las coordenadas espaciales, entonces, necesariamente debe escaparse por la coordenada temporal. Como este argumento es válido para todo $n \in \mathbb{N}$, deducimos que el intervalo maximal es $\mathbb{R}$.

Teorema: Escape de compactos
Sea $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ localmente de Lipschitz según la variable espacial y continua, $K \subset \Omega$ un conjunto compacto y $\phi : I(x_0, t_0) \to \mathbb{R}^n$ la solución maximal de la ecuación diferencial $\dot{x} = f(x, t)$ con condiciones iniciales $x(t_0) = x_0$. Entonces:

$$\exists t_1 < t_0, t_1 \in I(x_0, t_0) \text{ tal que } (\phi(t_1), t_1) \notin K$$

$$\exists t_2 > t_0, t_1 \in I(x_0, t_0) \text{ tal que } (\phi(t_2), t_2) \notin K$$