

Nº de examen	Cédula	Apellido y nombre	Salón

**Respuestas V/F**

Ej. 1A	Ej. 1B	Ej. 1C	Ej. 1D	Ej. 1E
V	F	V	F	F

Ej. 2A	Ej. 2B	Ej. 2C	Ej. 2D	Ej. 2E
F	V	V	V	F

Ej. 3A	Ej. 3B	Ej. 3C	Ej. 3D
V	F	F	V

Ej. 4A	Ej. 4B
V	V

**Respuestas MO**

Ej. 5	Ej. 6	Ej. 7	Ej. 8
F	D	C	D

**Importante**

- El examen dura 3 horas.
- El examen es de 100 puntos en total y se aprueba con 50 o mas puntos.
- Solo serán válidas las respuestas a los ejercicios dentro del cuadro de respuestas.
- Los puntajes están indicados al comienzo de cada ejercicio. Un ejercicio o parte de un ejercicio sin responder no lleva puntaje (es decir 0 puntos).

**Ejercicios de Verdadero/Falso**

**Ejercicio 1 (Puntajes: 1.5 cada respuesta correcta; -1 cada respuesta incorrecta)**

Dada la ecuación (\*)  $y'' - y = 4x$  indicar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

- A) La solución general de (\*) es de la forma  $\varphi(x) = ae^x + be^{-x} - 4x$  y  $\psi(x) = e^x + \sqrt{2}e^{-x} - 4x$  es la solución tal que  $\psi(0) = 1 + \sqrt{2}$  y  $\psi'(0) = -3 - \sqrt{2}$ .
- B) La solución general de (\*) es de la forma  $\varphi(x) = a \sin(x) + b \cos(x) - 4x$  y  $\psi(x) = \sin(x) + \sqrt{2} \cos(x) - 4x$  es la solución tal que  $\psi(0) = \sqrt{2}$  y  $\psi'(0) = -3$ .
- C) La solución general de (\*) es de la forma  $\varphi(x) = ae^x + (b - 2)e^{-x} - 4x$  y las soluciones que cumplen  $\psi(0) = -\psi'(0)$  son de la forma  $\psi(x) = 2e^x + (b - 2)e^{-x} - 4x$ .
- D) La solución general de (\*) es de la forma  $\varphi(x) = a(e^x + e^{-x}) - 4bx$ .
- E) La solución general de (\*) es de la forma  $\varphi(x) = ae^x + bxe^x - 4x$ .

Aclaración: recordar que  $a$  y  $b$  representan parámetros reales.

**Ejercicio 2 (Puntajes: 3.5 cada respuesta correcta; -2.5 cada respuesta incorrecta)**

Sea el sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = g(x, y) \end{cases}$$

con  $f$  y  $g$  funciones de  $\mathbb{R}^2$  a valores en  $\mathbb{R}$  de clase  $C^1$ .

Se sabe que  $C = \{(x, y) : x^2 = y^2\}$  es el conjunto de puntos de equilibrio y  $H(x, y) = xy$  es una preintegral.

Indicar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

- A) El origen  $(0, 0)$  es necesariamente estable para el futuro.
- B) Toda solución maximal  $(I, \varphi)$  satisface que  $I$  es no acotado.
- C) Si  $(I, \varphi)$  es solución maximal con  $\varphi(0) = (-1, 0)$  entonces  $\varphi(t) = (x(t), 0)$  con  $x : I \rightarrow \mathbb{R}$ .
- D) Si  $(I, \varphi)$  es solución maximal con  $\varphi(0) = (1, 0)$  y  $\dot{\varphi}(0) = (-1, 0)$  entonces  $I$  es no acotado superiormente y  $\|\varphi(t)\| \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow +\infty$ .
- E) Si  $(I, \varphi)$  es solución maximal con  $\varphi(0) = (1, 3)$  y  $\varphi(t) = (x(t), y(t))$  entonces  $y(t)$  es acotada y  $x(t)$  no lo es.

**Ejercicio 3 (Puntajes: 3.5 cada respuesta correcta; -2.5 cada respuesta incorrecta)**

Sea el sistema lineal  $\dot{X} = AX$  con  $A$  una matriz  $3 \times 3$  a coeficientes reales. Se sabe que  $A$  es semejante a

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Indicar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

- A) El origen  $(0, 0)$  es estable para el futuro.
- B) El origen  $(0, 0)$  es estable para el pasado.
- C) La única solución periódica es la de equilibrio.

*Recordar que una solución  $\varphi(t)$  es periódica si existe  $T > 0$  con  $\varphi(t + T) = \varphi(t)$  para todo  $t$ .*

- D) Existen soluciones  $\varphi(t)$  tales  $\lim_{t \rightarrow -\infty} \|\varphi(t)\| = +\infty$ .

**Ejercicio 4 (Puntajes: 9 cada respuesta correcta; -6 cada respuesta incorrecta)**

Sea  $u(x, t)$  la solución de la ecuación del calor en  $(0, \ell) \times (0, \infty)$

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} \\ u(0, t) = 0, \quad u(\ell, t) = 0 \\ u(x, 0) = \sin\left(\frac{\pi}{\ell}x\right) - \sqrt{2}\sin\left(\frac{3\pi}{\ell}x\right) \end{cases}$$

Indicar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

- A)  $u(\ell/2, 0) = 1 + \sqrt{2}$  y  $\sup_{x \in (0, \ell)} \left| \frac{u(x, t)}{e^{-\pi^2 t/\ell^2} + e^{-9\pi^2 t/\ell^2}} \right| \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 1$ .
- B)  $u_x(\ell/4, 0) = \frac{\pi}{\ell} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} + 3 \right)$

---

**Ejercicios de Múltiple Opción**

---

**Ejercicio 5 (Puntaje: 6 respuesta correcta; -1 respuesta incorrecta)**

¿Cuál es la solución general de la ecuación  $\dot{x} = 2x + 1$ ?

Respuesta:

- A)  $x = Ce^{2t} - 1$
- B)  $x = Ce^{t/2} - 2$
- C)  $x = t^2 + t + C$
- D)  $x = e^{t/2} + C$
- E)  $x = Ce^{2t} + 1$
- F)  $x = Ce^{2t} - 1/2$
- G)  $x = e^{2t} + C$
- H) Ninguna de las anteriores.

---

**Ejercicio 6 (Puntaje: 18 respuesta correcta; -3.5 respuesta incorrecta)**

Sea el sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = \lambda x + y \\ \dot{y} = -2x - \lambda y \end{cases}$$

con  $\lambda \in \mathbb{R}$ , y la función  $V(x,y) = 2x^2 + 2\lambda xy + y^2$ .

Indicar la opción correcta:

- A) La función  $V(x,y)$  es de Liapunov en un entorno de  $(0,0)$  para el valor  $\lambda = 0$ .
- B) Si  $\lambda = \sqrt{2}$  o  $\lambda = -\sqrt{2}$  el  $(0,0)$  es un punto de equilibrio estable para el futuro.
- C) Si  $\lambda \geq 0$  el  $(0,0)$  es un punto de equilibrio estable para el futuro.
- D) La función  $V(x,y)$  es una preintegral para todo  $\lambda \in \mathbb{R}$ , y si  $|\lambda| < \sqrt{2}$  el  $(0,0)$  es estable para el futuro.
- E) La función  $V(x,y)$  es una preintegral para todo  $\lambda \in \mathbb{R}$ , y si  $|\lambda| < \sqrt{2}$  el  $(0,0)$  es asintóticamente estable para el futuro.

Recordar que  $V$  es de Lyapunov si  $V(x,y) > 0$  y  $\dot{V}(x,y) < 0$  para  $(x,y) \neq (0,0)$ .

---

**Ejercicio 7 (Puntaje: 12 respuesta correcta; -2.5 respuesta incorrecta)**

Sea  $\varphi$  solución de

$$\begin{cases} \dot{x} = t \\ \dot{y} = x - y + 1 \\ x(0) = 1 \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

Hallar el valor de  $\varphi(2)$ :

- A)  $\varphi(2) = (3, 3e^2 - 1)$
- B)  $\varphi(2) = (1, 3e^2 - 1)$
- C)  $\varphi(2) = (3, -e^{-2} + 3)$
- D)  $\varphi(2) = (0, 3e^2 - 1)$
- E)  $\varphi(2) = (2, -e^{-2} + 3)$

**Ejercicio 8 (Puntaje: 7 respuesta correcta; -1.5 respuesta incorrecta)**

Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   $2\pi$ -periódica tal que  $f(x) = |x|$  para todo  $x \in (-\pi, \pi)$ .

Hallar la serie de Fourier  $Sf(x)$  de  $f(x)$ :

- A)  $Sf(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \sin((2n-1)x)$
- B)  $Sf(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)} \cos((2n-1)x)$
- C)  $Sf(x) = -\frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos((2n-1)x)$
- D)  $Sf(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos((2n-1)x)$
- E)  $Sf(x) = \pi - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} [\cos((2n-1)x) + \sin((2n-1)x)]$