Examen de Ecuaciones Diferenciales
20 de julio de 2021
Solución

Ejercicio 1

1. Dado $x \in \mathbb{R}$ y sea n_0 tal que $n_0 > x$, tenemos que $f_n(x) = 0$ para todo $n \geq n_0$, lo que implica que f_n converge puntualmente a la función $f(x) = 0$.

   Sea K un subconjunto compacto de $\mathbb{R}$. Como K es acotado tenemos que $K \subseteq [a, b]$ para algún par a, b. Sea $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 \geq b$. Entonces todo $x \in K$ cumple que $n_0 > x$ y por lo tanto $f_n(x) = 0$ para todo $x \in K$ y $n \geq n_0$. Esto a su vez implica que $\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in K} f_n(x) = 0$ y por lo tanto f_n converge uniformemente a 0 en x.

   Como f_n converge puntualmente a 0, este es nuestro candidato para estudiar la convergencia uniforme en $\mathbb{R}$. Es claro que para cualquier valor de n hay un punto en el cual $f_n(x) = 1$. Esto implica que $\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)| = 1$ por lo que la sucesión no converge uniformemente en $\mathbb{R}$.

2. Un análisis análogo muestra que la función converge puntualmente a 0. En este caso tenemos que $\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)| = 1/n$ que a su vez tiende con n a 0, por lo que f converge uniformemente a 0.

Ejercicio 2

1. La función $f(x, y) = (-y+x(\epsilon-(x^2+y^2)), x+y(\epsilon-(x^2+y^2)))$ es un polinomio en cada coordenada, lo que implica que es C^1 (derivable con derivada continua) y por lo tanto es continua y localmente Lipschitz, lo que implica que estamos en las hipótesis del teorema de Picard.

2. Vamos a linealizar para poder aplicar el teorema de Hartman-Grossman. Tenemos que

$$J_f(x, y) = \begin{pmatrix} \epsilon - x^2 - y^2 - 2x^2 & -1 + 2xy \\ 1 - 2xy & \epsilon - x^2 - y^2 \end{pmatrix}$$

   y evaluando en 0 tenemos que

$$J_f(0, 0) = \begin{pmatrix} \epsilon & -1 \\ 1 & \epsilon \end{pmatrix}$$

   Los valores propios de esta matriz son $\epsilon \pm i$. Como hay un valor propio con parte real positiva el teorema de Hartman-Grossman nos dice que el punto de equilibrio $(0, 0)$ es **inestable**.

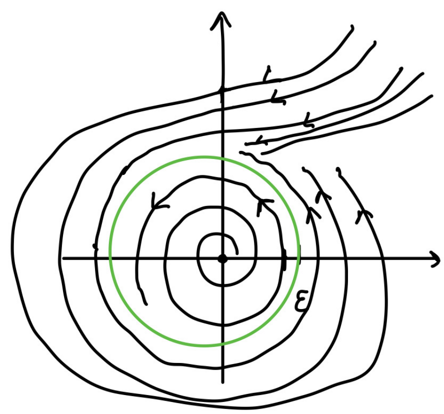
3. Hacemos el cambio a polares

$$\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\,\mathrm{sen}(\theta) \end{cases}$$

   Luego tenemos que

$$\begin{cases} \dot{x} = \dot{r}\cos(\theta) - r\,\mathrm{sen}(\theta)\dot{\theta} \\ \dot{y} = \dot{r}\cos(\theta) + r\cos(\theta)\dot{\theta} \end{cases}$$

   Sustituyendo en la ecuación y despejando $\dot{r}$ y $\dot{\theta}$ obtenemos



$$\begin{cases} \dot{r} = r(\epsilon - r^2) \\ \dot{\theta} = 1 \end{cases}$$

Observamos que todas las soluciones con $r = \sqrt{\epsilon}$ se mantienen en ese radio y giran en sentido antihorario. A su vez, las soluciones con $r < \sqrt{\epsilon}$ crecen en radio hasta acercarse a la circunferencia de radio $\sqrt{\epsilon}$ y las soluciones con $r > \sqrt{\epsilon}$ decrecen en radio (tendiendo a la misma circunferencia). Luego el diagrama queda como en la figura.

4. Por escape de compactos, tenemos que las soluciones con $r(0) \leq \sqrt{\epsilon}$ están definidas para todo tiempo, y que las soluciones con $r(0) > \sqrt{\epsilon}$ están definidas para todo tiempo a futuro. Para ver que estas últimas no están definidas para todo tiempo pasado, basta con comparar el radio con la ecuación diferencial $\dot{r} = -r^3$.

   Otra forma de verlo es resolver la ecuación diferencial del radio en polares y estudiar el intervalo de definición de las soluciones. La ecuación $\dot{r} = r(\epsilon - r^2)$ es una ecuación de Bernoulli de orden 3, por lo que se resuelve haciendo el cambio de variable $z = r^{-2}$. Su solución general es:

$$r(t) = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\epsilon} + \left(\frac{1}{r^2(0)} - \frac{1}{\epsilon}\right) e^{-2\epsilon t}}}$$

   A partir de esa solución es fácil ver que si $r(0) \leq \sqrt{\epsilon}$ las soluciones están definidas para todo t, mientras que si $r(0) > \sqrt{\epsilon}$ esa solución está definida en $(t^*, +\infty)$, donde $t^* = \frac{1}{2\epsilon} \log\left(1 - \frac{\epsilon}{r^2(0)}\right) < 0$.

Ejercicio 3

1. Como f es una función par, su serie de Fourier va a ser de cosenos. Calculamos entonces los coeficientes.

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{4}{\pi}$$

   Luego calculamos:

$$
\begin{aligned}
a_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos\left(\frac{x}{2}\right)\cos(kx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} \cos\left(\frac{x}{2}\right)\cos(kx)\,dx \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \cos((k+1/2)x) + \cos((k-1/2)x)\,dx = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\operatorname{sen}((k+1/2)\pi)}{k+1/2} + \frac{\operatorname{sen}((k-1/2)\pi)}{k-1/2}\right)
\end{aligned}
$$

Luego, la serie de Fourier es:

$$S(f) = a_0/2 + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos(kx)$$

2. Como f es continua en todo el dominio y existen las derivadas laterales en todos los puntos, el teorema de Dini nos dice que la serie de Fourier de f converge puntualmente a f en todo $\mathbb{R}$.