Examen de Ecuaciones Diferenciales.

20 de julio de 2021.

No. de examen	Apellido y nombre	Firma	Cédula

En todos los casos se deben justificar las respuestas, haciendo referencia a los resultados utilizados. El mínimo para aprobar el examen son dos problemas correctos.

1. *a*) Sea $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la sucesión de funciones definida por $f_n(x) = 0$ si $x \leq n$ y $f_n(x) = 1$ si $x > n$. Estudiar convergencia puntual y probar que f_n converge uniformemente en todo subconjunto compacto (cerrado y acotado) de $\mathbb{R}$. Converge uniformemente en $\mathbb{R}$?

   b) Sea $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la sucesión de funciones definida por $f_n(x) = 0$ si $x \leq n$ y $f_n(x) = 1/n$ si $x > n$. Estudiar convergencia puntual y uniforme de f_n en $\mathbb{R}$.

2. Se considera el sistema
$$\begin{cases} \dot{x} = -y + x(\epsilon - (x^2 + y^2)) \\ \dot{y} = x + y(\epsilon - (x^2 + y^2)) \end{cases}$$
   con $\epsilon > 0$.

   a) Probar que está en las hipótesis de Picard.

   b) Estudiar la estabilidad del origen.

   c) Dibujar el diagrama de fase. Se sugiere estudiar el sistema en polares.

   d) Estudiar intervalos maximales de sus soluciones.

3. *a*) Hallar la serie de Fourier de la función
$$f(x) = \cos\left(\frac{x}{2}\right), -\pi \leq x \leq \pi$$
   extendida al resto de $\mathbb{R}$ para que sea una función 2π periódica.
   Sugerencia: Pueden ser de utilidad las identidades:
$$\begin{aligned} 2\sin(x)\sin(y) &= \cos(x-y) - \cos(x+y) \\ 2\sin(x)\cos(y) &= \sin(x+y) + \sin(x-y) \\ 2\cos(x)\cos(y) &= \cos(x-y) + \cos(x+y) \end{aligned}$$

   b) Indicar el máximo subconjunto de $\mathbb{R}$ para el cual la serie de Fourier converge puntualmente a f. Justifique su respuesta.