Universidad de la República | **Ecuaciones Diferenciales**
Facultad de Ingeniería - IMERL | **Febrero 2021**

SOLUCIÓN DEL EXAMEN – Jueves 25 de Febrero de 2021

Nro de Parcial	Cédula	Apellido y nombre

Escribir nombre y cédula en todas las hojas que se entreguen.

Ejercicio 1.(30 pts.) Se considera la ecuación diferencial $\dot{x} = (1-x)x$.

(1) Bosquejar el diagrama de fase.

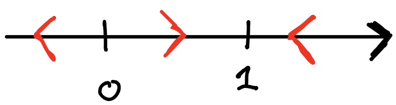
(2) Estudiar la estabilidad de los puntos de equilibrio.

(3) Bosquejar el gráfico de las soluciones en el plano tx.

(4) ¿Qué se puede decir de los intervalos maximales de las soluciones?

SOLUCIÓN:

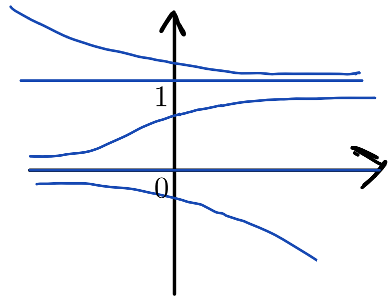
(1) Estudiando el signo de la función $f(x) = x(1-x)$ tenemos que el diagrama de fase es el siguiente.



(2) Como las soluciones con condición inicial $x(0) = x_0 < 0$ son estrictamente decrecientes conlcuimos que 0 es inestable.

Para el punto de equilibrio 1 podemos considerar la linealización $\dot{x} = f(1) + f'(1)(x-1) = -1(x-1) = -x+1$. Como el factor que multiplica x es negativo podemos concluir que el punto de equilibrio es estable y asintóticamente estable.

(3) En base al diagrama de fase realizamos el siguiente bosquejo de soluciones.



(4) Consideremos la ecuación diferencial con condición inicial $x(0) = x_0$. Vamos a separar en tres casos.

- Si $x_0 \in (0,1)$: Por unicidad de soluciones se cumple que $x(t) \neq 0$ y $x(t) \neq 1$, por lo tanto, dado $n \in \mathbb{N}$ por el teorema de escape de compactos la solución sale del compacto $[-n,n] \times [0,1]$. Como no puede hacerlo por la variable espacial, debe hacerlo por la variable temporal y por lo tanto la solución maximal con esa condición inicial está definida en todo $\mathbb{R}$.
- Si $x_0 > 1$ entonces la solución es decreciente (ver diagrama de fase). Por lo tanto la solución al sistema cumple que $x(t) < x_0$ para todo $t > 0$. Esto implica que, por el teorema de escape de compactos, la solución sale del compacto $[0,n] \times [1,x_0]$. Como no puede hacerlo por la variable espacial debe hacerlo por la variable temporal y por lo tanto la solución maximal con esa condición inicial está definida para todo tiempo futuro. Es decir, el intervalo maximal tiene la forma $(a,+\infty)$, donde a podría ser real o $-\infty$.
- Si $x_0 < 0$ entonces la solución es creciente (ver diagrama de fase). Por lo tanto la solución al sistema cumple que $x(t) < x_0$ para todo $t < 0$. Aplicando un razonamiento análogo al caso anterior concluimos que el intervalo maximal tiene la forma $(-\infty, a)$, donde a podría ser real o $+\infty$.

Ejercicio 2.(30 pts.)

(1) Calcular, utilizando la definición, la transformada de Laplace de la función $f(t) = e^{\lambda t}, t \geq 0$.

(2) Utilizando la parte anterior, hallar la solución de la ecuación diferencial $\dot{X} = AX$, donde

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

Nota: este ejercicio evalúa el tema Transformada de Laplace, no se corregirá la solución hallada por otro método. Puede ser útil recordar que la transformada de Laplace de $te^{\lambda t}$ *es* $1/(s-\lambda)^2$.

(3) Elegir un valor de λ y bosquejar el diagrama de fase de la ecuación diferencial.

SOLUCIÓN:

(1) Por definición de Transformada de Laplace, se tiene que: $F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$
De donde, $F(s) = \int_0^\infty e^{\lambda t}e^{-st}dt = \int_0^\infty e^{-(s-\lambda)t}dt = \frac{-1}{s-\lambda}e^{-(s-\lambda)t}|_0^\infty$

$$F(s) = \frac{1}{s-\lambda}, (s > \lambda)$$

(2) Aplicando la transformada de laplace al sistema :

$$\begin{cases} \dot{x} = \lambda x \\ \dot{y} = x + \lambda y \end{cases}$$

obtenemos

$$\rightarrow \begin{cases} sX(s) - x(0) = \lambda X(s) \\ sY(s) - y(0) = X(s) + \lambda Y(s) \end{cases}$$

donde $X(s)$ e $Y(s)$ denotan las transformadas de Laplace de x e y respectivamente.

De la primer ecuación, se deduce que: $X(s) = \frac{x(0)}{s-\lambda}$. Aplicando la antitransformada de Laplace a ambos lados de la igualdad y utilizando la parte (1), se obtiene:

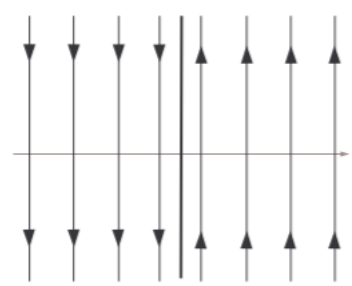
$$x(t) = x(0)e^{\lambda t}$$

Reemplazando en la segunda ecuación obtenemos: $Y(s) = \frac{X(s)}{s-\lambda} + \frac{y(0)}{s-\lambda}$. Utilizando que $X(s) = \frac{x(0)}{s-\lambda}$ obtenemos: $Y(s) = \frac{x(0)}{(s-\lambda)^2} + \frac{y(0)}{s-\lambda}$. Aplicando la antitransformada de Laplace y la propiedad de linealidad:

$$y(t) = x(0)te^{\lambda t} + y(0)e^{\lambda t}$$

(3) A modo de ejemplo, se elige $\lambda = 0$, obteniendo:

$$\begin{cases} x(t) = x(0) \\ y(t) = x(0)t + y(0) \end{cases}$$



$\lambda = 0$

Ejercicio 3.(30 pts.) Consideremos la sucesión de funciones en $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por:

$$f_n(x) = \frac{x}{1 + nx^2}$$

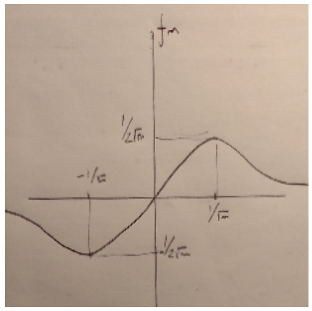
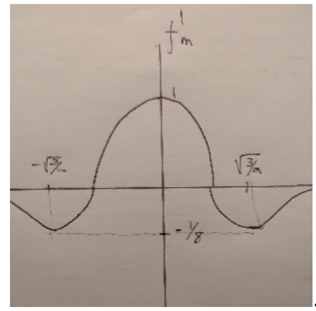
(1) Bosquejar gráficamente las sucesiones f_n y f_n'.

(2) Calcular el límite puntual de las sucesiones f_n y f_n', a los que llamamos f y g respectivamente.

(3) Probar que $f'(x)$ existe para todo $x \in \mathbb{R}$ pero $f'(0) \neq g(0)$.

(4) Para los siguientes conjuntos $X \subset \mathbb{R}$ estudiar si se tiene $f_n \rightrightarrows f$ y $f_n' \rightrightarrows g$ sobre el conjunto X: $X = \mathbb{R}; X = \mathbb{R} - \{0\}; X = \mathbb{R} - \{(-a, a)\}$ con $a > 0$.

SOLUCIÓN:

(1) El bosquejo de f_n es:  y el de f_n' es: .

(2) Fijado un valor de $x \in \mathbb{R}$ observamos que el límite de $f_n(x)$ cuando n tiende a infinito es nulo. Por lo tanto f es la función nula. Respecto a $f_n'(x) = \frac{1-nx^2}{(1+nx^2)^2}$ debemos ser más cuidadosos. Aquí $f_n'(0) = 1\ \forall n$ y por lo tanto tiende a 1, mientras que si $x \neq 0$ el límite de $f_n'(x)$ cuando n tiende a infinito es nulo. Por lo tanto la función g es nula salvo en $x = 0$ que vale 1. Observemos que g es discontinua detalle que podrá ser de utilidad más adelante.

(3) $f'(x)$ existe en todo real x por ser f la función nula y $f'(0) = 0 \neq 1 = g(0)$.

(4)
- f_n: El bosquejo de la primera parte muestra su comportamiento en la medida que n crece. La función es impar y su máximo vale $\frac{1}{2\sqrt{n}}$ el cual tiende a cero cuando n crece. Esto prueba la convergencia uniforme de f_n a f cuando $X = \mathbb{R}$ o en cualquier subconjunto de él.

- f_n': es fácil ver que f_n' son funciones continuas para todo n. La continuidad se hereda por convergencia uniforme, es decir el límite uniforme de funciones continuas es continuo. Dado que g es discontinuo tenemos que f_n' no converge uniformemente a g en $X = \mathbb{R}$. Analicemos el caso $\mathbb{R} - \{0\}$. Aquí el argumento anterior no es válido ya que ahora g es continua. Pero el $\sup_{x\in X} |f_n'(x) - g(x)| = 1$ por lo que la convergencia uniforme tampoco sucede en este caso. En el caso $X = \mathbb{R} - \{(-a, a)\}$ con $a > 0$ fijo el asunto tiene más esperanza debido a que no solamente retiramos al cero sino que ponemos una barrera que no nos permite acercarnos a él. Observando el bosquejo de la función par f_n' vemos que si n es suficientemente grande (digamos $\sqrt{\frac{3}{n}} < a$ entonces el $\sup_{x\in X} |f_n'(x) - g(x)| = |f_n'(a)|$ que tiende a cero por lo que la convergencia uniforme en este caso está garantizada.

Ejercicio 4.(30 pts.) Se considera la ecuación

$$u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) = -x \text{ sen}(t), \quad \text{con } (x,t) \in D = (0,\pi) \times \mathbb{R}.$$

(1) Hallar una solución particular $u_0(x,t)$ de la forma $f(x)\sin(t) + g(x)$, tal que las funciones f y g satisfacen $f(0) = g(0) = 0$, $f'(0) = g'(0) = 1$.

(2) Hallar un candidato a solución u de la ecuación en el dominio D, que satisfaga las condiciones

$$u(x,0) = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen } nx}{n^4},\ x \in [0,\pi],$$

$$u_t(x,0) = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen } nx}{n^3},\ x \in [0,\pi],$$

$$u(0,t) = 0,\ t \in \mathbb{R},$$

$$u(\pi,t) = \pi\ \text{sen}(t) + \pi,\ t \in \mathbb{R}.$$

Puedes usar, sin justificar, la forma que tienen las soluciones para la ecuación de la cuerda $u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0$*, cuando las condiciones de borde son nulas.*

SOLUCIÓN:

(1) Sustituyendo la forma sugerida de la solución en la escuación diferencial, obtenemos

$$-f(x).\text{sen } t - (f''(x).\text{sen } t + g''(x)) = -x.\text{ sen } t,$$

$$\Longleftrightarrow\ g''(x) = (f(x) + f''(x) - x)\text{ sen } t.$$

Observemos que el término de la izquierda no varía con t pues solamente depende de x, de donde el término de la derecha tampoco puede variar con t. Concluimos entonces que

$$g''(x) = 0, \quad (f(x) + f''(x) - x) = 0.$$

Resolviendo estas ecuaciones diferenciales, junto con las condiciones iniciales de la letra, concluimos que $g(x) = x, \quad f(x) = x.$, de donde la solución particular nos queda

$$u_0(x,t) = x.\text{sen } t + x.$$

(2) Observemos primero que la solcuión u_0 cumple lo siguiente:

$$u_0(x,0) = x,\ x \in [0,\pi],$$

$$u_{0,t}(x,0) = x,\ x \in [0,\pi],$$

$$u_0(0,t) = 0,\ t \in \mathbb{R},$$

$$u_0(\pi,t) = \pi\ \text{sen}(t) + \pi,\ t \in \mathbb{R}.$$

Utilizando el principio de superposición de soluciones y escribiendo nuestra soluci'on $u = u_0 + w$, vemos que basta resolver la ecuación $w_{tt}(x,t) - w_{xx}(x,t) = 0$, con condiciones de borde nulas y condiciones iniciales:

$$w(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen } nx}{n^4},\ x \in [0,\pi],$$

$$w_t(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\text{sen } nx}{n^3},\ x\in[0,\pi],$$

.

Por el método de separación de variables, sabemos que la solución a este problema es

$$w(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\text{sen}(kx)(\frac{\cos(kt)}{k^4}+\frac{\text{sen}(kt)}{k^4}).$$

Concluimos finalmente que

$$u(x,t)=x.\text{sen } t+x+\sum_{k=1}^{\infty}\text{sen}(kx)(\frac{\cos(kt)}{k^4}+\frac{\text{sen}(kt)}{k^4}).$$