Universidad de la República **Ecuaciones Diferenciales**
Facultad de Ingeniería - IMERL **Febrero 2021**

EXAMEN – JUEVES 25 DE FEBRERO DE 2021

Nro de Parcial	Cédula	Apellido y nombre

Escribir nombre y cédula en todas las hojas que se entreguen.

Ejercicio 1.(30 pts.) Se considera la ecuación diferencial $\dot{x} = (1 - x)x$.

(1) Bosquejar el diagrama de fase.

(2) Estudiar la estabilidad de los puntos de equilibrio.

(3) Bosquejar el gráfico de las soluciones en el plano tx.

(4) ¿Qué se puede decir de los intervalos maximales de las soluciones?

Ejercicio 2.(30 pts.)

(1) Calcular, utilizando la definición, la transformada de Laplace de la función $f(t) = e^{\lambda t}, t \geq 0$.

(2) Utilizando la parte anterior, hallar la solución de la ecuación diferencial $\dot{X} = AX$, donde

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

Nota: este ejercicio evalúa el tema Transformada de Laplace, no se corregirá la solución hallada por otro método. Puede ser útil recordar que la transformada de Laplace de $te^{\lambda t}$ es $1/(s-\lambda)^2$.

(3) Elegir un valor de λ y bosquejar el diagrama de fase de la ecuación diferencial.

Ejercicio 3.(30 pts.) Consideremos la sucesión de funciones en $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por:

$$f_n(x) = \frac{x}{1 + nx^2}$$

(1) Bosquejar gráficamente las sucesiones f_n y f_n'.

(2) Calcular el límite puntual de las sucesiones f_n y f_n', a los que llamamos f y g respectivamente.

(3) Probar que $f'(x)$ existe para todo $x \in \mathbb{R}$ pero $f'(0) \neq g(0)$.

(4) Para los siguientes conjuntos $X \subset \mathbb{R}$ estudiar si se tiene $f_n \rightrightarrows f$ y $f_n' \rightrightarrows g$ sobre el conjunto X: $X = \mathbb{R}; X = \mathbb{R} - \{0\}; X = \mathbb{R} - \{(-a, a)\}$ con $a > 0$.

Ejercicio 4.(30 pts.) Se considera la ecuación

$$u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) = -x \operatorname{sen}(t), \quad \text{con } (x,t) \in D = (0,\pi) \times \mathbb{R}.$$

(1) Hallar una solución particular $u_0(x,t)$ de la forma $f(x)\sin(t) + g(x)$, tal que las funciones f y g satisfacen $f(0) = g(0) = 0$, $f'(0) = g'(0) = 1$.

(2) Hallar un candidato a solución u de la ecuación en el dominio D, que satisfaga las condiciones

$$u(x,0) = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} nx}{n^4},\ x \in [0,\pi],$$

$$u_t(x,0) = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} nx}{n^3},\ x \in [0,\pi],$$

$$u(0,t) = 0,\ t \in \mathbb{R},$$

$$u(\pi,t) = \pi \operatorname{sen}(t) + \pi,\ t \in \mathbb{R}.$$

Puedes usar, sin justificar, la forma que tienen las soluciones para la ecuación de la cuerda $u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0$*, cuando las condiciones de borde son nulas.*