Ecuaciones Diferenciales
Solución examen Julio 2020

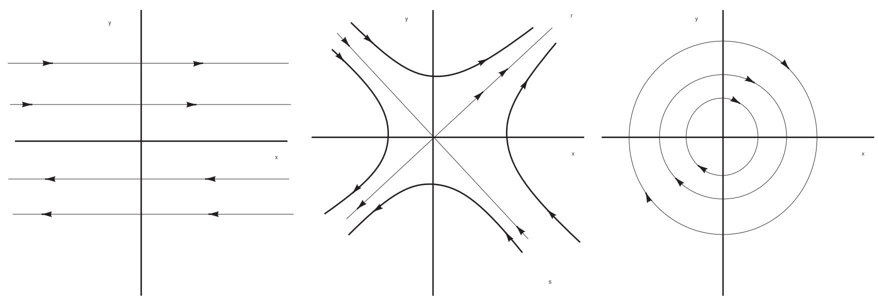
Ejercicio 1. Parte a). Para probar que $ax^2(t) - y^2(t)$ es constante, basta con probar que la derivada de $ax^2(t) - y^2(t)$ es cero. Entonces

$$(ax^2(t) - y^2(t))' = 2ax(t)x'(t) - 2y(t)y'(t) \overset{\substack{x'=y \\ y'=ax}}{=} 2ax(t)y(t) - 2y(t)ax(t) = 0.$$

Parte b). Como $ax^2(t) - y^2(t)$ es constante entonces las soluciones están contenidas en las curvas $ax^2 - y^2 = k$, para $k \in \mathbb{R}$.

- Si $a = 0$ entonces las soluciones tiene que estar incluidas en las curvas de ecuación $-y^2 = k$ lo que implica que $y = \sqrt{-k} = k_1(cte)$.

Figura 1.



(a) (b) (c)

- Si $a > 0$ entonces las soluciones tiene que estar incluidas en las curvas de ecuación $ax^2 - y^2 = k$. Como $a > 0$, $ax^2 - y^2 = k$ es la ecuación de una hipérbola.
- Si $a < 0$ entonces las soluciones tiene que estar incluidas en las curvas de ecuación $ax^2 - y^2 = k$. Como $a < 0$, $ax^2 - y^2 = k$ es la ecuación de una circunferencia.

Parte c). Recordemos que en una ecuación lineal, un punto crítico es estable (asitóticamente estable) si y solo si el origen es estable (asitóticamente estable). Del diagrama de fase se deduce:

- Si $a = 0$, los puntos críticos son $(x_0, 0)$ y son inestables ya que el origen lo es.
- Si $a > 0$, el único punto crítico es el origen y es inestable.
- Si $a < 0$, el único punto crítico es el origen y estable pero no asintóticamente estable.

Ejercicio 2. Parte a). Es inmediato probar que $(0,0)$ es punto de equilibrio. Consideremos $f(x, y) = (-y + x(x^2 + y^2 - 1), x + y(x^2 + y^2 - 1)$, entonces

$$J_{(0,0)} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Luego
$$det\begin{pmatrix} -1-\lambda & -1 \\ 1 & -1-\lambda \end{pmatrix} = (-1-\lambda)^2+1.$$
Lo que implica que los valores propios son $\lambda_1 = -1-i$ y $\lambda_2 = -1+i$.
Como todos los valores propios tienen parte real negativa, el $(0,0)$ es asintóticamente estable.
Parte b). Consideramos $V(x,y) = x^2+y^2$. Entonces

$$\dot{V}(x,y) = 2x\dot{x}+2y\dot{y} = 2x(-y+x(x^2+y^2-1))+2y(x+y(x^2+y^2-1)) = \\ 2(x^2+y^2)(x^2+y^2-1).$$
En un enorno pequeño del origen (menos el origen) se tiene que x^2+y^2-1 es negativo, como $2(x^2+y^2)$ es positivo, concluimos que $\dot{V}(x,y)$ es negativo.

Parte c). Hacemos el cambio de variable a polares. Sean $x = r\cos(\theta)$ y $y = r\operatorname{sen}(\theta)$. Entonces $\dot{x} = \dot{r}\cos(\theta) - r\operatorname{sen}(\theta)\dot{\theta}$ y $\dot{y} = \dot{r}\operatorname{sen}(\theta)+r\cos(\theta)\dot{\theta}$. Sutituyendo en $\dot{x} = -y+x(x^2+y^2-1)$ y $\dot{y} = x+y(x^2+y^2-1)$ tenemos que

$$\dot{r}\cos(\theta) - r\operatorname{sen}(\theta)\dot{\theta} = -r\operatorname{sen}(\theta)+r\cos(\theta)(r^2-1). \tag{1}$$

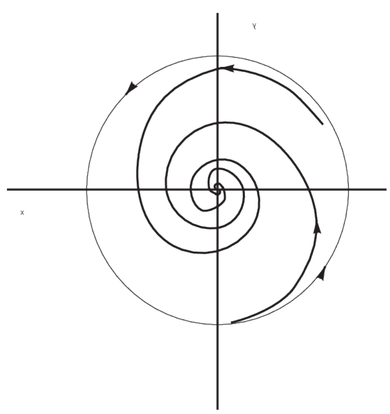
$$\dot{r}\operatorname{sen}(\theta)+r\cos(\theta)\dot{\theta} = x = r\cos(\theta)+r\operatorname{sen}(\theta)(r^2-1). \tag{2}$$

Multiplicando la ecuación (1) por $\cos(\theta)$, la ecuación (2) por $\operatorname{sen}(\theta)$ y sumandolas, obtenemos
$$\dot{r}(\cos^2(\theta)+\operatorname{sen}^2(\theta)) = r(\cos^2(\theta)+\operatorname{sen}^2(\theta))(r^2-1)$$
De donde obtenemos la siguiente ecuación:
$$\dot{r} = r(r^2-1)$$
Aca queda claro que $r \equiv 1$ es solución de la ecuación.

Sustituyendo $\dot{r} = r(r^2-1)$ en la ecuación (1) y haciendo cuentas, tenemos que $\dot{\theta} = 1$.

Parte d).

FIGURA 2.



(a)

Ejercicio 3. Parte a) y parte b). Ver notas del curso. Capítulo 9: Ecuaciones en derivadas parciales.
Parte c). Aplicando la parte b) la solución es

$$U(t,x) = \frac{1+(x+t)^2+1+(x-t)^2}{2} + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} -\operatorname{sen}(s)\; ds =$$
$$1+t^2+x^2+\frac{1}{2}(\cos(x+t)-\cos(x-t)) = 1+t^2+x^2-\operatorname{sen}(t)\operatorname{sen}(x).$$

Hasta acá iba la letra del examen del curso nuevo (Int. a las Ec. Dif). Para el viejo había un ejercicio más.

Ejercicio 4.

Parte a). Ver notas del curso. Capítulo convergencia uniforme.

Parte b). Es claro que f_n converge puntualmente a $f(x) = 0$ para todo $x \in (0,1)$No hay convergencia uniforme pues:

$$\sup_{x\in(0,1)} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in(0,1)} x^n = 1$$