Ecuaciones Diferenciales
Examen Julio

29 de julio de 2020.

No. Examen	Apellido y nombre	Firma	Cédula

1. (25 puntos) Sea el sistema lineal

$$\begin{cases} x^{'} = y \\ y^{'} = ax \quad (a \in \mathbb{R}) \end{cases}$$

   a) Probar que si $\phi(t) = (x(t), y(t))$ es solución, entonces $ax^2(t) - y^2(t)$ es constante. (7 puntos)
   b) Dibujar el diagrama de fase de las soluciones. Discutir según los valores de $a \in \mathbb{R}$.(10 puntos)
   c) Hallar los puntos de equilibrio. Discutir según el valor de $a \in R$. Estudiar la estabilidad de cada uno de ellos. (8 puntos)

2. (25 puntos) Consideremos la ecuación diferencial

$$\begin{cases} \dot{x} &= -y + x(x^2 + y^2 - 1) \\ \dot{y} &= x + y(x^2 + y^2 - 1) \end{cases} \tag{1}$$

   a) Probar que $(0, 0)$ es punto de equilibrio. Linealizar la ecuación alrededor de $(0, 0)$. ¿Se puede concluir que $(0, 0)$ es estable, o asintóticamente estable? (6 puntos)
   b) Hallar una función de Liapunov estricta para la ecuación en un entorno de $(0, 0)$. (6 puntos)
   c) Sea (x_0, y_0) con $||(x_0, y_0)|| = 1$ y φ la solución con $\varphi(0) = (x_0, y_0)$. Probar que $||\varphi(t)|| = 1$ para todo $t \in \mathbb{R}$. (6 puntos)
   d) Dibujar el diagrama de fases de la ecuación en el disco cerrado $\bar{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x^2 + y^2 \leq 1\}$. (7 puntos)

3. (25 puntos) Sea el problema:

$$(*) \begin{cases} U_{tt}(t, x) = c^2 U_{xx}(t, x), & (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}. \\ U(0, x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}. \\ U_t(0, x) = v_0(x), & x \in \mathbb{R}. \\ \text{Con } u_0 \in C^2(\mathbb{R}) \text{ y } v_0 \in C^1(\mathbb{R}). \end{cases}$$

   a) Haciendo el cambio de variable $\alpha = x + ct$, $\beta = x - ct$, probar que existen funciones $F, G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que $U(t, x) = F(x + ct) + G(x - ct)$ es una solución del problema $(*)$. (10 puntos)
   b) Probar, a partir de lo anterior, que hay una solución del problema $(*)$ de la forma

$$U(t, x) = \frac{u_0(x + ct) + u_0(x - ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} v_0(s)\, ds. \quad \text{(10 puntos)}$$

   c) Usando lo anterior, hallar una solución del problema

$$\begin{cases} U_{tt}(t, x) - U_{xx}(t, x) = 0, & (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}. \\ U(0, x) = 1 + x^2, & x \in \mathbb{R}. \\ U_t(0, x) = -\operatorname{sen}(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad . \text{ (5 puntos)}$$

4. (25 puntos)
   a) Defina convergencia puntual y convergencia uniforme. (10 puntos)
   b) Pruebe que la sucesión de funciones f_n, donde $f_n : (0, 1) \to \mathbb{R}$ es $f_n(x) = x^n$, no converge uniformemente. (15 puntos)

$\cos(x + y) - \cos(x - y) = -2 \operatorname{sen}(x) \operatorname{sen}(y).$