Ecuaciones Diferenciales.

SOLUCIÓN EXAMEN 27 DE FEBRERO DE 2020.

Ejercicio 1.

La letra del examen del curso nuevo (Introducción a las Ecuaciones Diferenciales) fue la misma que la del curso viejo (Ecuaciones Diferenciales) salvo por las primeras 3 partes del ejercicio 1. Por lo tanto, la solución para el examen nuevo comienza a partir de la parte 4 de ese ejercicio.

Parte 1. Ver notas.

Parte 2. Para la ecuación $\dot{X} = f(X)$, consideramos $f(X) = 0$ para todo X. Luego todo punto es punto de equilibrio. Por lo tanto, todo punto crítico es estable pero no asintóticamente estable. También se puede considerar en $\mathbb{R}^2$ un sistema lineal, $\dot{X} = AX$, con los valores propios de A complejos con parte real nula.

Parte 3. Ver notas.

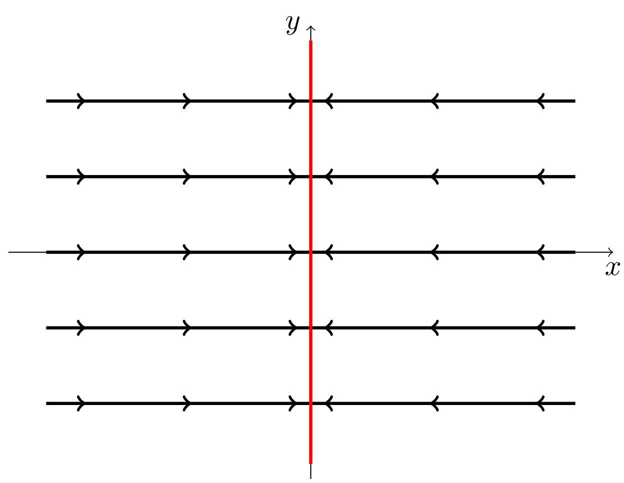
Parte 4.a) La matriz Jacobiana es:

$$\begin{pmatrix} -3x^2 + y^2 - 1 & 2xy \\ -4xy & -2x^2 - 3y^2 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto el sistema lineal en $(0,0)$ queda

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Y el diagrama de fase resulta:



Parte 4.b) Consideremos la función $V(x,y) = ax^2 + by^2$. Entonces

$$\dot{V} = 2ax\dot{x} + 2by\dot{y} = 2ax(-x^3 + xy^2 - x) + 2by(-2x^2y - y^3) = -2ax^4 + (2a - 4b)x^2y^2 - 2ax^2 - 2by^4.$$

Tomando $b = 1$ y $a = 2$, se tiene que $\dot{V} = -4x^4 - 4x^2 - 2y^4$ es definida negativa. Por lo tanto, como V tiene un mínimo estricto en $(0,0)$, por Liapunov 2, el $(0,0)$ es asintóticamente estable.

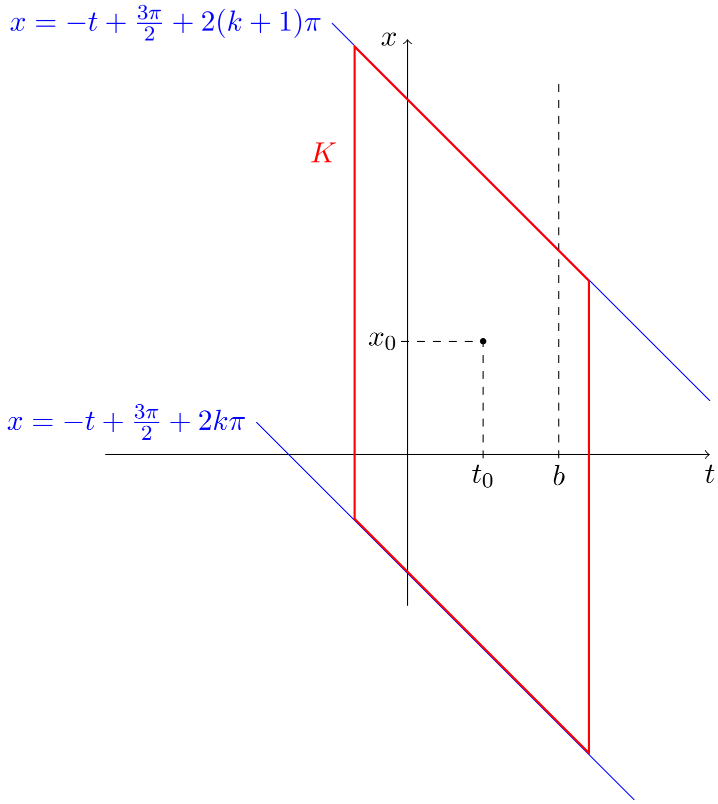
Ejercicio 2.

Parte 1. Ver notas.

Parte 2.a) Sea $x(t) = at + b$. Para que x sea solución debe cumplirse $\dot{x} = a = \operatorname{sen}(at + b + t) = \operatorname{sen}((a + 1)t + b)$. Por lo tanto, tomamos $a = -1$ y $b = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$.

Parte 2.b) Sea φ una solución maximal con $\varphi(t_0) = x_0$. Si $x_0 = -t_0 + \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$ para algún $k \in \mathbb{Z}$, entonces (por la parte 1) la solución es $\varphi(t) = -t + \frac{3}{2}\pi + 2k\pi$ y el intervalo maximal es trivialmente $\mathbb{R}$. En cualquier otro caso, existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $-t_0 + \frac{3}{2}\pi + 2k\pi < x_0 < -t_0 + \frac{3}{2}\pi + 2(k + 1)\pi$. Llamemos (a, b) al intervalo maximal. Vamos a probar que $b = +\infty$; de forma análoga se prueba que $a = -\infty$.

Sea K el compacto de la figura. Por el teorema de salida de compactos, el gráfico de φ se tiene que salir de K. No se puede salir por la tapa de arriba, ya que cortaría la solución $x(t) = -t + 2(k + 1)\pi$ (y esto violaría Picard). Lo mismo sucede con la tapa de abajo. Entonces se tiene que escapar por la tapa de la derecha, y eso hace que la solución tenga que estar definida para un tiempo $t_1 > b$, lo que implica una contradicción.



Ejercicio 3.

Parte 1. Busquemos una solución de la forma $\hat{u}(t, x) = f(x)\cos(t)$. Entonces $\hat{u}_{xx} = f^{''}(x)\cos(t)$ y $\hat{u}_{tt} = -f(x)\cos(t)$. Por lo tanto debe cumplirse

$$f^{''}(x)\cos(t) = -f(x)\cos(t) + x\cos(t).$$

De donde se deduce que $f^{''}(x) = -f(x) + x$. Luego la solución es $f(x) = C_1 \operatorname{sen}(x) + C_2 \cos(x) + x$. Como $f(0) = 0$ y $f^{'}(0) = 1$, entonces $C_1 = C_2 = 0$. Lo que implica que $f(x) = x$. Por lo tanto $\hat{u}(t, x) = x\cos(t)$.

Parte 2. Como $U = u - \hat{u}$ se cumple que $U_{tt} = u_{tt} - \hat{u}_{tt}$ y $U_{xx} = u_{xx} - \hat{u}_{xx}$. Como u y $\hat{u}$ verfican $(*)$, entonces se tiene que $u_{xx} = u_{tt} + x\cos(t)$ y $\hat{u}_{xx} = \hat{u}_{tt} + x\cos(t)$. Entonces:

$$U_{xx} = u_{xx} - \hat{u}_{xx} = u_{tt} + x\cos(t) - (\hat{u}_{tt} + x\cos(t)) = u_{tt} - \hat{u}_{tt} = U_{tt}.$$

Parte 3. Ya vimos que $U_{xx} = U_{tt}$. Veamos otras condiciones que cumple U:

- $U(0,x) = u(0,x) - \hat{u}(0,x) = x + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(nx)}{n^3} - x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(nx)}{n^3}.$
- $U_t(0,x) = u_t(0,x) - \hat{u}_t(0,x) = 0 + 0 = 0.$
- $U(t,0) = u(t,0) - \hat{u}(t,0) = 0 + 0 = 0.$
- $U(t,\pi) = u(t,\pi) - \hat{u}(t,\pi) = \pi\cos(t) - \pi\cos(t) = 0.$

Por lo visto en el teórico (ver notas) la solución para U es:

$$U(t,x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(nx)}{n^3}\cos(nt).$$

Como $U = u - \hat{u}$ entonces $u = U + \hat{u}$. Por lo tanto:

$$u(t,x) = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(nx)}{n^3}\cos(nt)\right) + x\cos(t).$$