Universidad de la República - Facultad de Ingeniería - IMERL.
Curso: Ecuaciones Diferenciales (2018).

EXAMEN – 27 DE FEBRERO DE 2020. DURACIÓN: 4:00 HS.

No. Examen	Apellido y nombre	Cédula	Firma

PARA USO DOCENTE			
Ej 1	Ej 2	Ej 3	**Total**

Ejercicio 1. (35 puntos)

1. Definir punto crítico estable y punto crítico asintóticamente estable para una ecuación diferencial autónoma $\dot{X} = f(X)$.
2. Dar un ejemplo de una ecuación con un punto crítico estable pero no asintóticamente estable.
3. Enunciar y demostrar el teorema de Liapunov referente a estabilidad asintótica (Liapunov 2).
4. Se considera el sistema
$$(E)\quad \begin{cases} \dot{x} = -x^3 + xy^2 - x \\ \dot{y} = -2x^2y - y^3 \end{cases}$$
   a) Linealizar la ecuación (E) alrededor de $(0,0)$ y esbozar el diagrama de fase de la ecuación lineal obtenida.
   b) Determinar si para la ecuación (E) el origen es un punto de equilibrio estable, inestable o asintóticamente estable.

Ejercicio 2. (30 puntos)

1. Enunciar y demostrar el teorema de salida de compactos.
2. Se considera la ecuación $x' = \operatorname{sen}(x+t)$.
   a) Buscar soluciones de la forma $x(t) = at + b$, con $a, b \in \mathbb{R}$.
   b) Probar que el intervalo maximal de cualquier solución maximal es $\mathbb{R}$.

Ejercicio 3. (35 puntos)

Se considera la ecuación en derivadas parciales
$$(*)\ u_{xx}(t,x) = u_{tt}(t,x) + x\cos t$$
con $u : (0,+\infty) \times (0,\pi) \to \mathbb{R}$.

1. Hallar una solución de la forma $\hat{u}(t,x) = f(x)\cos t$, con $f(0) = 0$ y $f'(0) = 1$.
2. Si u es una función que verifica $(*)$ y $\hat{u}$ es la hallada en la parte anterior, probar que la función $U(t,x) = u(t,x) - \hat{u}(t,x)$ verifica la ecuación en derivadas parciales $U_{xx} = U_{tt}$.
3. Hallar un candidato a solución del problema:
$$\begin{cases} u_{xx} = u_{tt} + x\cos t \quad \text{para todo } (t,x) \in (0,+\infty) \times (0,\pi), \\ u(0,x) = x + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(nx)}{n^3} \quad \text{para todo } x \in [0,\pi], \\ u_t(0,x) = 0 \text{ para todo } x \in (0,\pi), \\ u(t,0) = 0 \quad \text{para todo } t \in [0,+\infty), \\ u(t,\pi) = \pi\cos t \quad \text{para todo } t \in [0,+\infty), \\ u \text{ de clase } C^2 \text{ en } (0,+\infty) \times (0,\pi) \text{ y continua en } [0,+\infty) \times [0,\pi]. \end{cases}$$