Universidad de la República **Funciones de Variable Compleja**
Facultad de Ingeniería - IMERL **Curso 2020**

EXÁMEN – Lunes 14 de diciembre de 2020

Nro de Exámen	Cédula	Apellido y nombre

Escribir nombre y cédula en todas las hojas que se entreguen.

1. Ejercicio 1

Solución de la versión 1:

(1) Las soluciones de la ecuación diferencial para la función A es creciente hasta el punto de equilibrio. A partir de ese momento es decreciente. El único diagrama de fases que cumple esto es el 2.

Para la función B la solución es decreciente hasta el punto de equilibrio, por lo que el diagrama de fases es el 3.

Un análisis similar muestra que el diagrama de fase 1 corresponde a la función C.

(2) Viendo los diagramas de fases podemos determinar en qué momento la ecuación diferencial está creciendo y decreciendo, y así podemos hacer un esquema de cómo se ven las soluciones. Observar que, como la ecuación diferencial es autónoma, las soluciones son las mismas pero trasladadas.

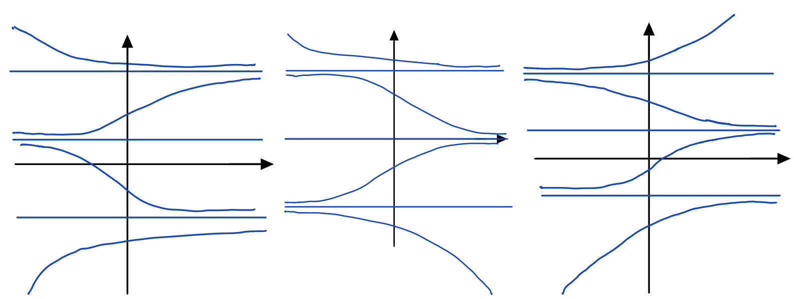


Figure 1. De izquierda a derecha, son las gráficas de las soluciones para las ecuaciones $\dot{x} = f(x)$ para $f(x)$ como en las gráficas A, B y C respectivamente.

(3) Tomamos como ejemplo a la ecuación diferencial $\dot{x} = f(x)$ con $f(x)$ la función correspondiente a la gráfica A. Los demás son análogos. Llamemos x_1, x_2 y x_3 a los puntos de equilibrio del sistema con $x_1 < x_2 < x_3$. Claramente las sluciones $x(t) = x_i$ están definidas para todo tiempo y, como estamos en las hipótesis del teorema de Picard, ninguna otra solución puede cortar las gráficas de estas soluciones. Por lo tanto, dada una solución con condición inicial $x(t_0) = x_0$ con $x_1 \leq x_0 \leq x_3$, tenemos que $x_1 \leq x(t) \leq x_3$ para todo tiempo en el intervalo maximal. Si definimos el compacto $K = [a, b] \times [x_1, x_3]$ con $x_0 \in [a, b]$ el teorema de escape de compactos nos dice que la solución maximal tiene que escaparse del compacto K. Como no lo puede hacer en la variable espacial, lo debe hacer en la variable temporal tanto a pasado como a futuro y por lo tanto la solución maximal está definida para todo tiempo.

Para una solución con condición inicial $x(t_0) = x_0$ con $x_0 < x_1$ tenemos que la solución es creciente y por lo tanto se escapa por la variable temporal **a futuro** de compactos de la forma $[t_0 - \epsilon, b] \times [x_0, x_1]$, por lo que está definida para todo tiempo a futuro. Análogamente las soluciones con $x_0 > x_3$ también están definidas para todo tiempo a futuro.

Solución de la versión 2:

(1) Las soluciones de la ecuación diferencial para la función A es decreciente hasta el punto de equilibrio. A partir de ese momento es creciente. El único diagrama de fases que cumple esto es el 3.

Para la función B la solución es creciente hasta el punto de equilibrio, por lo que el diagrama de fases es el 1.

Un análisis similar muestra que el diagrama de fase 2 corresponde a la función C.

(2) Viendo los diagramas de fases podemos determinar en qué momento la ecuación diferencial está creciendo y decreciendo, y así podemos hacer un esquema de cómo se ven las soluciones. Observar que, como la ecuación diferencial es autónoma, las soluciones son las mismas pero trasladadas.

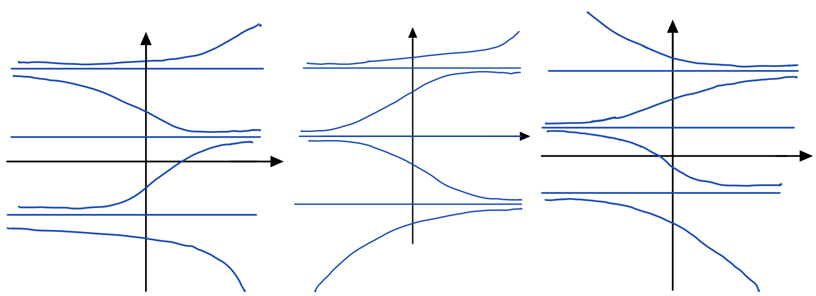


Figure 2. De izquierda a derecha, son las gráficas de las soluciones para las ecuaciones $\dot{x} = f(x)$ para $f(x)$ como en las gráficas A, B y C respectivamente.

(3) Tomamos como ejemplo a la ecuación diferencial $\dot{x} = f(x)$ con $f(x)$ la función correspondiente a la gráfica A. Los demás son análogos. Llamemos x_1, x_2 y x_3 a los puntos de equilibrio del sistema con $x_1 < x_2 < x_3$. Claramente las sluciones $x(t) = x_i$ están definidas para todo tiempo y, como estamos en las hipótesis del teorema de Picard, ninguna otra solución puede cortar las gráficas de estas soluciones. Por lo tanto, dada una solución con condición inicial $x(t_0) = x_0$ con $x_1 \leq x_0 \leq x_3$, tenemos que $x_1 \leq x(t) \leq x_3$ para todo tiempo en el intervalo maximal. Si definimos el compacto $K = [a, b] \times [x_1, x_3]$ con $x_0 \in [a, b]$ el teorema de escape de compactos nos dice que la solución maximal tiene que escaparse del compacto K. Como no lo puede hacer en la variable espacial, lo debe hacer en la variable temporal tanto a pasado como a futuro y por lo tanto la solución maximal está definida para todo tiempo.

Para una solución con condición inicial $x(t_0) = x_0$ con $x_0 < x_1$ tenemos que la solución es decreciente y por lo tanto se escapa por la variable temporal **a pasado** de compactos de la forma $[x_1, x_3] \times [a, t_0 + \epsilon] \times [x_0, x_1]$, por lo que está definida para todo tiempo a pasado. Análogamente las soluciones con $x_0 > x_3$ también están definidas para todo tiempo a pasado.

2. Ejercicio 2

(1) Los valores propios son π y -1 ($\sqrt{7}$ y -1 en la otra versión). Es claro que la base **B** determina como matriz asociada a la matriz de Jordan. De esta se deduce que la dimensión de los subespacios propios son 1 y 2 respectivamente.

(2) La matriz asociada en la base **B** es

$$\begin{pmatrix} \pi & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \pi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

que resulta ser la matriz de Jordan J. Sabemos que $A = PJP^{-1}$, con P igual a

$$\begin{pmatrix} 2 & \pi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ \pi & 0 & 0 & \pi \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Es fácil ver a partir de la definición de matriz exponencial que $e^{At} = Pe^{Jt}P^{-1}$. Recordemos que

$$e^{Jt} = \begin{pmatrix} e^{t\pi} & 0 & 0 & 0 \\ te^{t\pi} & e^{t\pi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix},$$

por lo que solo resta calcular P^{-1} para obtener la matriz fundamental pedida. La otra versión del examen es análoga sustituyendo π por $\sqrt{7}$. La matriz P^{-1} en la primera versión vale

$$\frac{1}{\pi+6}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & -\pi \\ 1 & 0 & \frac{-2}{\pi} & 2 \\ 0 & \frac{\pi+6}{5} & 0 & 0 \\ -3 & 0 & \frac{6}{\pi} & \pi \end{pmatrix}.$$

Cambiando π por $\sqrt{7}$ obtenemos P^{-1} para la segunda versión.

(3) La solución del sistema $\dot{x} = Ax$ que en tiempo cero es $x_0 \in \mathbb{R}^4$ es $x(t) = e^{At}x_0$

3. Ejercicio 3

(1) Los puntos de equilibrio cumplen que $\dot{x} = 0$ y $\dot{y} = 0$. De esto se deduce que los puntos de equilibrio son de la forma $(x, y) = (\frac{2n+1}{2}\pi, 0)$ con n entero.

(2) Para probar que H es una preintegral, se debe mostrar que la derivada de H a lo largo de las soluciones de la ecuación diferencial es 0.

$$\dot{H}(x, y) = H_x\dot{x} + H_y\dot{y} = 0.$$

(3) En primer lugar, intentemos estudiar la estabilidad de los puntos a través del sistema linealizado.

$$J_f(\frac{2n+1}{2}\pi, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -sin(\frac{2n+1}{2}\pi) & 0 \end{pmatrix}$$

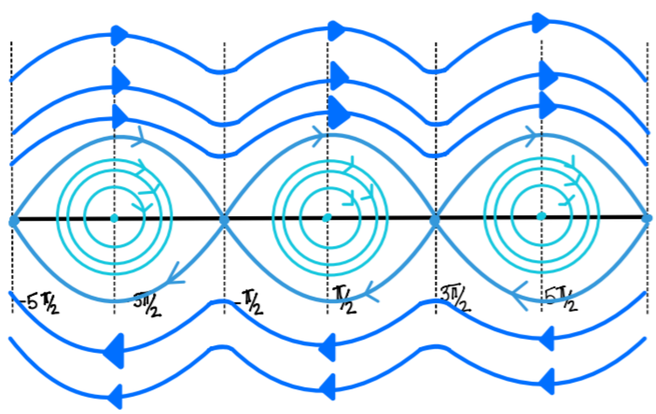
Por un lado, si n es impar: $\lambda = \pm 1$. En ese caso, por el teorema de Hartman, los puntos de equilibrio son inestables. Si n es par, $\lambda = \pm i$. En ese caso, el teorema de hartman NO nos permite concluir nada acerca de la estabilidad.

Con el objetivo de estudiar la estabilidad de los puntos de equilibrio de la forma $(\frac{2n+1}{2}\pi, 0)$ con n par, utilizamos el Teorema de Lyapunov 1. Es claro que la función $H(x,y) = \frac{y^2}{2} - sin(x)$ (de clase C^1) se minimiza cuando $sin(x) = 1$ e $y = 0$. De donde, los puntos de interés son mínimos estrictos de H. De la parte b, sabemos que $\dot{H} = 0$, por lo que estamos en las hipótesis del teorema de Lyapunov 1, y los puntos son estables. No podemos afirmar que sean asintoticamente estables.

(4) De la pregunta b, sabemos que la función $H(x,y) = \frac{y^2}{2} - sin(x)$ cumple que su derivada a lo largo de las soluciones es nula. Esto indica que, las soluciones se encuentran en curvas de nivel de H:

$$\frac{y^2}{2} - sin(x) = C \quad \longrightarrow \quad y = \pm\sqrt{2C + 2sin(x)}$$

.



4. Ejercicio 4

(1) Sea $g(x) = x(\pi - x)$. Observemos que $g(0) = g(\pi) = 0$. Como queremos aproximar $x(\pi - x)$ por una serie de senos en el intervalo $[0, \pi]$, tomamos f la extensión impar y $2\pi-$periódica de g. Obtenemos entonces que $S_\infty(f) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k sen(kx)$, donde $b_k = \langle f, sen(kx) \rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) sen(kx) dx$. Como para cualquier k, el producto $f(x).sen(kx)$ es una función par, nos queda

$$b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x) sen(kx) dx$$

. Para el cálculo de los coeficientes b_k, aplicamos integración por partes dos veces. Ver cálculo explícito en el Capítulo 8 de las notas, páginas 11 y 12.

Una vez que hallamos los b_k, necesitamos probar que $S_\infty = f$ en $[0, \pi]$, para lo que precisamos convergencia puntual de la sucesión de sumas parciales $S_n(f)$. Como la función f es C^1 en todo $\mathbb{R}$, podemos aplicar el Teorema de Dini y recuperar la igualdad que estamos buscando.

(2) Aplicando el método de separación variables, se obtiene que

$$U(t,x) = bsen(kx)e^{-k^2t}.$$

Escribiendo la condición inicial en términos de una serie de fourier de senos, y utilizando que la suma de soluciones es solución para suma de condiciones iniciales, el candidato resulta:

$$U(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k sen(kx)e^{-k^2t}.$$

con b_k, los coeficientes de fourier hallados en la parte a.

(3) Sabemos que nuestro candidato cumple la condición inicial y las condiciones de borde, por como lo construimos. Tenemos que probar que:
   - U es continua en $[0,+\infty) \times [0,\pi]$.
   - U es de clase C^2 en $(0,+\infty) \times (0,\pi)$, y $U_t = U_{xx}$, para todo $(t,x) \in (0,+\infty) \times (0,\pi)$.

   Para asegurar la continuidad, y el pasaje de las derivadas para adentro de la serie, necesitamos convergencia uniforme de la sucesión de sumas parciales de la serie asociada a la función U, y lo mismo para las sucesiones de derivadas $U_{k,t}, U_{k,x}, U_{k,xx}$. Precisamos para la convergencia uniforme, utilizar el criterio del MAyorante de Weierstrass. El cálculo explícito está en el capítulo 9 de las notas, página 8, ejemplo 0.3