Universidad de la República **Ecuaciones Diferenciales**
Facultad de Ingeniería - IMERL **Diciembre 2020**

EXAMEN – Sábado 19 de Diciembre de 2020

Nro de Parcial	Cédula	Apellido y nombre

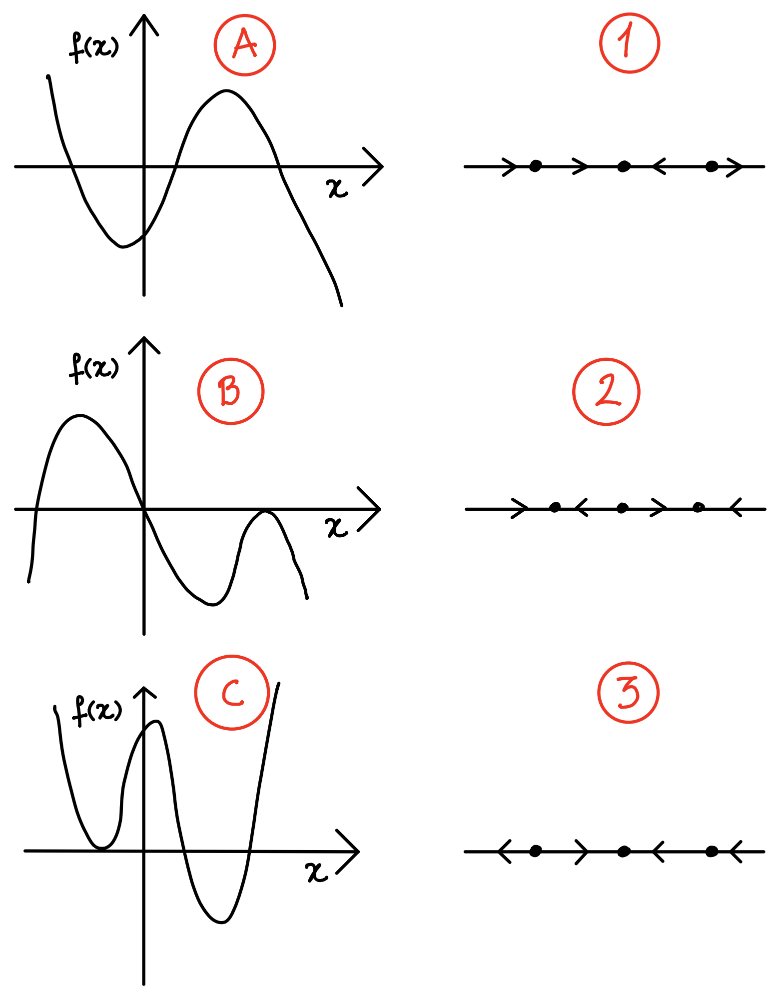
Escribir nombre y cédula en todas las hojas que se entreguen.

Ejercicio 1.(20 pts.) En la columna de la izquierda se bosquejan los gráficos de funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continuas y localmente lipschitzianas. En la columna de la derecha se representan los diagramas de fase de la ecuación diferencial $\dot{x} = f(x)$.

(1) Asociar cada gráfico con su correspondiente diagrama, justificando brevemente su elección.

(2) Elegir uno de los casos y bosquejar el gráfico de las soluciones en el plano tx.

(3) Elegir uno de los casos. ¿Qué se puede decir sobre los intervalos maximales de las soluciones?.



Ejercicio 2.(30 pts.) Se considera A una matriz 4×4 con coeficientes reales. Se sabe que existe $B = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ una base de $\mathbb{R}^4$ tal que:

$$Av_1 = \pi v_1 + v_2,\ Av_2 = \pi v_2,\ Av_3 = -v_3,\ Av_4 = -v_4.$$

(1) Hallar los valores propios de A, y para cada uno de ellos la dimensión del subespacio propio asociado.

(2) Hallar la matriz fundamental de la ecuación diferencial $\dot{X} = AX$ sabiendo que:

$$v_1 = (2, 0, \pi, 0),\ v_2 = (\pi, 0, 0, 3),\ v_3 = (0, 5, 0, 0),\ v_4 = (0, 0, \pi, 1).$$

(3) Hallar la solución general de la ecuación diferencial.

**Los resultados pueden expresarse como producto de matrices, no es necesario desarrollarlos.*

Ejercicio 3.(30 pts.) Se considera la ecuación diferencial

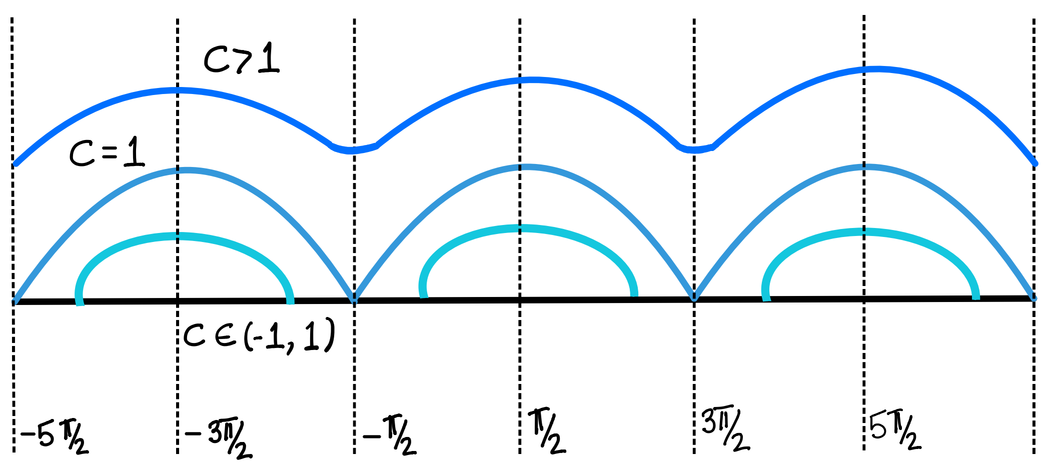
$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = cos(x) \end{cases}$$

(1) Encontrar todos los puntos de equilibrio de la ecuación.

(2) Se considera la función $H(x, y) = \frac{y^2}{2} - sen(x)$. Probar que H es una preintegral para la ecuación, es decir $\dot{H}(x, y) = 0$.

(3) Estudiar la estabilidad de todos los puntos de equilibrio.

(4) Bosquejar el diagrama de fase de la ecuación, sabiendo que los gráficos de la función $f(x) = \sqrt{2(sen(x) + C)}$ están bosquejados en la figura para los diferentes valores de C. Justifique.



Ejercicio 4.(30 pts.) Se considera el siguiente problema:

$$\begin{cases} U \text{ de clase } C^2 \text{ en } (0,+\infty)\times(0,\pi) \text{ y continua en } [0,+\infty)\times[0,\pi] \\ U_t = U_{xx} \quad (t,x)\in(0,+\infty)\times(0,\pi) \\ U(0,x) = x(\pi - x) \quad x\in[0,\pi] \\ U(t,0) = U(t,\pi) = 0 \quad t\in[0,+\infty) \end{cases}$$

(1) Demostrar la igualdad $x(\pi - x) = \sum_{k=1}^{+\infty} 4\frac{(-1)^{k+1}+1}{\pi k^3} sen(kx), \quad x\in[0,\pi]$.

(2) Hallar un candidato a solución U. (Se puede asumir y no se evaluará el método de separación de variables).

(3) Demostrar que el candidato hallado, es efectivamente una solución del problema.