Examen de Ecuaciones Diferenciales

Julio 2019

Solución

Ej. 1

1) $F(x,y) = (2x + \operatorname{sen} y,\ e^x + (x^2+1)y - 1)$

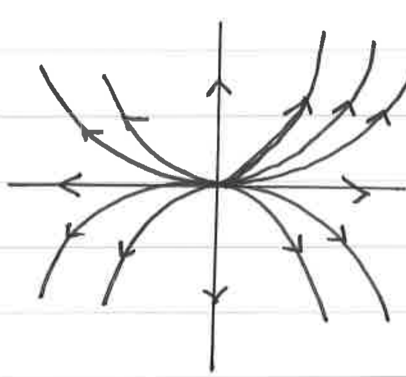
$F(0,0) = (0,0) \Longrightarrow (0,0)$ es punto de equilibrio.

$$DF(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & \cos y \\ e^x + 2xy & x^2+1 \end{pmatrix} \Longrightarrow DF(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2) La ecuación linealizada es

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Los valores propios de $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ son $\dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$, ambos positivos. Como A es simétrica, se diagonaliza en una base ortonormal. Por lo tanto, el diagrama de fases de la ecuación lineal es (a menos de una rotación de los ejes)



3) Como los valores propios de A son reales distintos de 0, el teorema de Hartman - Grobman nos dice que para la ecuación (E), al igual que para la lineal, $(0,0)$ es inestable.

Ej 2.

1) $z(t) = \log x(t) \Rightarrow z'(t) = \dfrac{x'(t)}{x(t)} \Rightarrow$

$$\Rightarrow z''(t) = \frac{x''(t)\,x(t) - x'(t)^2}{x(t)^2} = \frac{1}{x(t)^2}\left[\frac{x'(t)^2}{x(t)}\cdot x(t) - x'(t)^2\right] = 0.$$

usando que x es solución de la ecuación

2) $z''(t) = 0 \Rightarrow z'(t) = c_1$, con $c_1 \in \mathbb{R} \Rightarrow z(t) = c_1 t + c_0$ con $c_0, c_1 \in \mathbb{R}$.

$$\left.\begin{array}{l} z(0) = \log x_0 \\ z(1) = \log x_1 \end{array}\right| \Rightarrow \begin{array}{l} c_0 = \log x_0 \\ c_1 + c_0 = \log x_1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} c_0 = \log x_0 \\ c_1 = \log \dfrac{x_1}{x_0} \end{array}$$

Entonces

$$z(t) = \left(\log \frac{x_1}{x_0}\right) t + \log x_0 \quad \text{y}$$

$$x(t) = e^{z(t)} = x_0\, e^{t \log \frac{x_1}{x_0}}.$$

Ej 3.

1) $\begin{cases} \dot{x} = H_y \\ \dot{y} = -H_x \end{cases}$

H es preintegral $\longleftrightarrow \frac{d}{dt} H(x(t), y(t)) = 0 \longleftrightarrow$

$H_x \dot{x} + H_y \dot{y} = 0 \longleftrightarrow H_x H_y - H_y H_x = 0$ ✓

2) $\begin{cases} \dot{x} = 2y \\ \dot{y} = -\operatorname{sen} x \end{cases}$

Los puntos de equilibrio son aquellos para los cuales $2y = 0$ y $\operatorname{sen} x = 0$, es decir, los de la forma $(k\pi, 0)$ con $k \in \mathbb{Z}$.

Buscaremos $H(x,y)$ tal que $H_y(x,y) = 2y \quad (*)$
$H_x(x,y) = \operatorname{sen}(x) \quad (**)$

$(*)$ dice que
$$H(x,y) = y^2 + f(x)$$
$(**)$ dice que
$$H(x,y) = -\cos(x) + g(y).$$

Por lo tanto una preintegral es

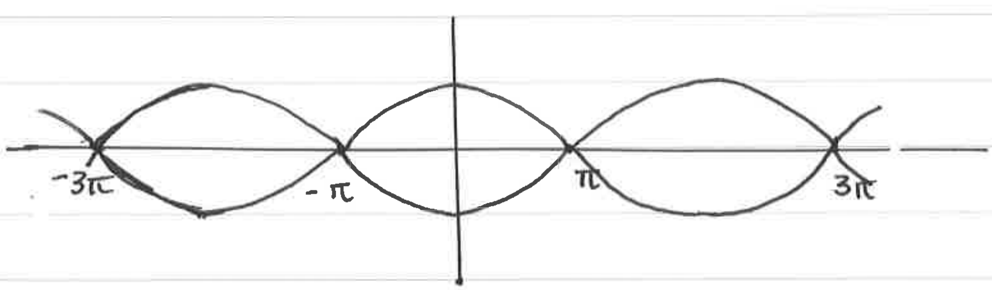
$$H(x,y) = y^2 - \cos(x).$$

3) Para la función $H(x,y) = y^2 - \cos(x)$, $H(0,0) = -1$.

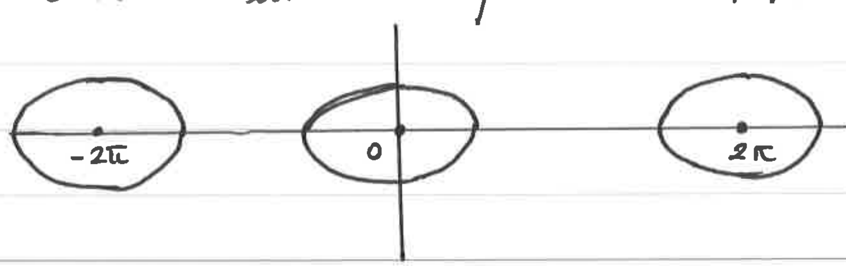
$H(x,y) = y^2 - \cos(x) \geq -\cos(x) \geq -1 \longrightarrow H(\mathbb{R}^2) \subset [-1,+\infty)$.
Como $H(0,y) = y^2 - 1$ y esto es una función continua de y que toma todos los valores en $[-1,+\infty)$ (pues $H(0,0) = -1$ y $\lim_{y\to+\infty} H(0,y) = +\infty$), H toma todos los valores en $[-1,+\infty)$.

$H(x,y) = -1 \longleftrightarrow y^2 = 0$, $\cos(x) = 1 \longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} /$
$(x,y) = (2k\pi, 0)$.

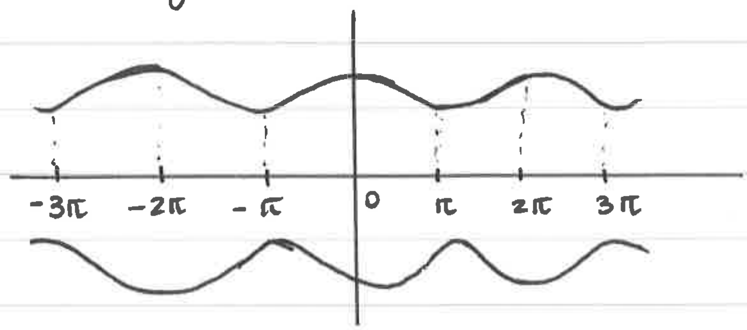
$H(x,y) = 1 \longleftrightarrow y^2 - \cos(x) = 1 \longleftrightarrow y = \pm\sqrt{1+\cos(x)}$.
Graficando la función $h(x) = \sqrt{1+\cos(x)}$ y su opuesta, tenemos



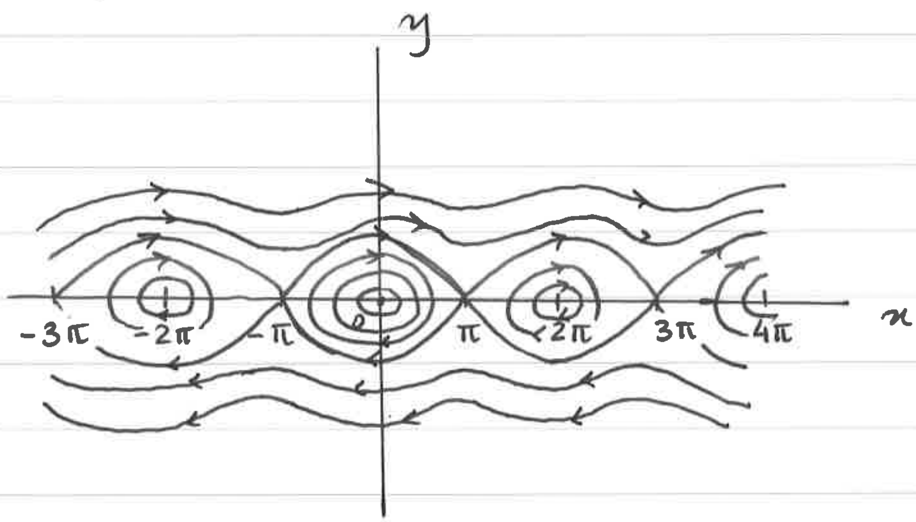
Para $\alpha \in (-1,1)$, $H(x,y) = \alpha \longleftrightarrow y = \pm\sqrt{\alpha + \cos(x)}$. Las curvas de nivel α son las gráficas de $h(x) = \sqrt{\alpha+\cos(x)}$ y $-h(x)$, funciones cuyo dominio es una unión de intervalos centrados en los puntos $(2k\pi, 0)$.



Para $\alpha > 1$, graficamos $h(x) = \sqrt{\alpha + \cos(x)}$ y $-h(x)$.



4) Juntando lo anterior y teniendo en cuenta el signo de $\dot{x}$ para orientar las trayectorias, el diagrama de fases queda:



5) A partir del diagrama, vemos que el punto de equilibrio $(k\pi, 0)$ es

* estable pero no asintóticamente estable si k es par
* inestable si k es impar.

- Ejercicio 4.

  - La función x^2 es par y por consiguiente no tiene coeficientes en la base de senos.

  - $$x^2 = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx.$$

    Por las fórmulas de las series de Fourier se obtiene:

    $$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{3}\pi^2.$$

    $$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos kx dx = 4\frac{(-1)^k}{k^2}.$$

    De lo cual tenemos

    $$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \cos kx.$$

  - Planteamos una solución del tipo

    $$u(t,x) = \frac{a_0(t)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k(t) \cos kx + b_k(t) \sin kx).$$

    Derivando una vez con respecto a t y dos veces con respecto a x y usando la ecuación obtenemos $a_0(t) = a_0$. Por otra parte se verifica

    $$a_k(t) = a_k(0)e^{-\frac{k^2}{2}t}, \quad b_k(t) = b_k(0)e^{-\frac{k^2}{2}t},$$

    la condición inicial $u(0,x) = f(x)$ implica que $a_k(t) = a_k e^{-\frac{k^2}{2}t}$ y $b_k(t) = 0$. De esta forma la solución se escribe

    $$u(t,x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-\frac{k^2}{2}t} \cos kx.$$

  - Cada termino de la serie de la derecha está acotada por los términos de la serie numérica de términos positivos

    $$\frac{a_0}{2} + 4\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} e^{-\frac{k^2}{2}t}$$

y esta última serie es convergente. Entonces por el criterio de Weierstrass la serie de funciones converge uniformemente en $[0,\infty)\times[-\pi,\pi]$.

- Para ver que la función satisface la ecuación en $[\delta,\infty)\times[-\pi,\pi]$ basta ver que los términos de las series que se obtienen al calcular las derivadas de primer orden con respecto a t y de segundo orden con respecto a x están acotados por $\mathbf{C}e^{-\frac{k^2}{2}\delta}$ y ese también es el término general de una serie numérica convergente. Entonces se puede derivar término a término y como cada término satisface la ecuación entonces $u(t,x)$ también la satisface.

▪ Ejercicio 5.

- Se tiene que

$$\hat{e}(\gamma)=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}e^{-i\gamma x}\,e^{-|x|}dx=\frac{1}{1+\gamma^2}.$$

- Sabemos por propiedades de la transformada de Fourier que

$$\int_{\mathbb{R}}e^{-i\gamma x}\frac{d^2}{dx^2}y(x)dx=-\gamma^2\hat{y}(\gamma).$$

Así al tomar transformada en el ecuación se obtiene

$$\gamma^2\hat{y}(\gamma)+\hat{y}(\gamma)=\hat{f}(\gamma),\ \text{así}\ \hat{y}(\gamma)=\frac{\hat{f}(\gamma)}{1+\gamma^2}.$$

- Por lo tanto

$$y(x)=\int_{-1}^{1}e^{-|x-y|}(1-|x|)dx.$$