Instituto de Matemática y Estadística Rafael Laguardia // Facultad de Ingeniería
Universidad de la República

Ecuaciones Diferenciales
Examen
Julio de 2019.

No. examen	Apellido y nombre	Cédula

Atención: Este examen consta de cuatro ejercicios que suman 100 puntos más un ejercicio optativo que da *20 puntos extra*. El examen se aprueba con 60 puntos, y la calificación máxima se obtiene con 100 puntos.

Ejercicio 1 (20 puntos)

Consideremos la ecuación diferencial

$$(\mathrm{E}) \qquad \begin{cases} \dot{x} &= 2x + \operatorname{sen}(y) \\ \dot{y} &= e^x + (x^2+1)y - 1 \end{cases}$$

1. Pruebe que $(0,0)$ es punto de equilibrio y linealice la ecuación alrededor de $(0,0)$.
2. Dibuje el diagrama de fases de la ecuación lineal.
3. Estudie la estabilidad de $(0,0)$ para la ecuación (E).

Ejercicio 2 (15 puntos)

1. Sea $x(t)$ la función solución de la ecuación diferencial no lineal de segundo orden
$$x''(t) = \frac{(x'(t))^2}{x(t)}. \qquad (1)$$
Demuestre que la función $z(t) = \ln(x(t))$ verifica $z''(t) = 0$.
2. Encuentre la forma general de la función $z(t)$.

3. Usando la expresión encontrada para $z(t)$, demuestre que la solución de la ecuación (1) que verifica $x(0) = x_0$ y $x(1) = x_1$ se escribe

$$x(t) = x_0 e^{t(\ln \frac{x_1}{x_0})}.$$

Ejercicio 3 (30 puntos)

1. Consideremos una función $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase C^2, y la ecuación diferencial autónoma

$$\begin{cases} \dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial y}(x,y) \\ \dot{y} &= -\frac{\partial H}{\partial x}(x,y) \end{cases}$$

   Pruebe que H es una preintegral de la ecuación.

2. Halle los puntos de equilibrio y una preintegral H de la ecuación

$$\text{(E)} \quad \begin{cases} \dot{x} &= 2y \\ \dot{y} &= -\operatorname{sen}(x) \end{cases}$$

   de modo que (E) sea una ecuación como la del inciso anterior para esa función H.

3. Observe que la preintegral H hallada en el inciso anterior no es única, porque puede sumársele cualquier constante. Elijamos $H(x,y)$ de modo que $H(0,0) = -1$. Pruebe que H toma todos los valores en $[-1, +\infty)$. Describa los conjuntos de nivel $H^{-1}(-1)$ y $H^{-1}(1)$. Esboce las curvas $H^{-1}(\alpha)$, para $\alpha \in (-1,1)$. Esboce las curvas $H^{-1}(\alpha)$, para $\alpha > 1$.

4. Dibuje el diagrama de fases de la ecuación (E).

5. Indique si los puntos de equilibrio de (E) son estables, inestables o asintóticamente estables.

Ejercicio 4 (35 puntos)

1. Sea la función periódica de período 2π definida en el intervalo de su período principal como

$$f(x) = x^2, \text{ para } -\pi < x < \pi.$$

   ¿Por qué su serie de Fourier solo tiene coeficientes no nulos en la base de cosenos?

2. Calcule la serie de Fourier de f y discuta su convergencia.

3. Considere la ecuación del calor

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) &= \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) \\ u(0,x) &= f(x) \\ u(t,x) &= u(t,x+2\pi). \end{cases}$$

   Resuelva la ecuación usando una serie del tipo

$$u(t,x) = \frac{a_0(t)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k(t)\cos kx.$$

   Determine los coeficientes $a_k(t)$.

4. Discuta la convergencia de la solución encontrada.

Los siguientes ejercicios valen 20 puntos cada uno. Puede elegir uno y solo uno de ellos para obtener estos puntos "extra".

Ejercicio 5

1. Recordemos que la transformada de Fourier de una función $\varphi(x)$ está dada por

$$\hat{\varphi}(\gamma) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\gamma x}\varphi(x)\,dx.$$

   Calcule la transformada de Fourier de

$$e(x) = \frac{1}{2}\,e^{-|x|}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

   (Observe que $e(x)$ es una función par).

2. Considere la ecuación diferencial ordinaria

$$\frac{d^2y}{dx^2}(x) - y(x) = -f(x) \text{ para } x \in \mathbb{R},$$

   donde $f(x) = 1 - |x|$ para $-1 < x < 1$ y $f(x) = 0$ para $|x| > 1$. Tome transformada de Fourier de ambos lados de la ecuación. Si denotamos $\hat{y}(\gamma)$ la transformada de Fourier de y, ¿qué ecuación verifica esta última función?

3. Recordemos el siguiente resultado:

   Sean $\hat{g}$ y $\hat{h}$ las transformada de Fourier de las funciones g y h respectivamente. Entonces la función $\hat{g}\hat{h}$ es la transformada de Fourier de

$$g * h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x-y)h(y)dy.$$

   Asumiendo este resultado, encuentre la solución de la ecuación diferencial.

Ejercicio 6

Consideremos I un intervalo abierto y O un abierto de $\mathbb{R}^d$. Sea $f : I \times O \to \mathbb{R}^d$ continua.

1. Justifique la siguiente afirmación. Si $(t_0, x_0) \in I \times O$ entonces existe un intervalo cerrado $I_1 = [\alpha_1, \alpha_2]$ y una bola cerrada $\overline{B}(x_0, \beta)$ tal que $(t_0, x_0) \in I_1 \times \overline{B}(x_0, \beta)$ y que $||f(t,x)|| \leq M$, para todo $(t, x) \in I_1 \times \overline{B}(x_0, \beta)$ y una constante M.

2. Definamos para $\varphi : I_1 \to \overline{B}(x_0, \beta)$, $T(\varphi)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))ds$. Demuestre que para $t \in I_\alpha = (t_0 - \alpha, t_0 + \alpha) \subset I_1$

$$||T(\varphi)(t) - x_0|| \leq M|t - t_0| \leq M\alpha.$$

   Además que la función $T(\varphi)$ es uniformemente continua en el intervalo I_α. Sugerencia: debe evaluar la norma de la diferencia $T(\varphi)(t_1) - T(\varphi)(t_2)$.

   Decimos que f es $Lip(t)$ si existe una función $k : I \to \mathbb{R}^+$ (no necesariamente acotada) tal que $\int_I k^2(t)dt < +\infty$, tal que

$$||f(t,x) - f(t,y)|| \leq k(t)||x - y||.$$

   En el resto del ejercicio, f es una función $Lip(t)$.

3. Sea $\mathcal{F} = \{\varphi : I_\alpha \subset I_1 \to \overline{B}(x_0, \beta) : \varphi \text{ continua}\}$. Halle α de modo que $T : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ sea una contracción. (Recuerde que por la desigualdad de Schwarz $\int_a^b |k(s)|ds \leq (b-a)^{\frac{1}{2}} (\int_a^b |k(s)|^2 ds)^{\frac{1}{2}}$).

4. Concluya por usted mismo la demostración del Teorema de Picard, bajo esta nueva hipótesis.