Instituto de Matemática y Estadística Rafael Laguardia // Facultad de Ingeniería
Universidad de la República

Ecuaciones Diferenciales
Examen
21 de febrero de 2019.

No. parcial	Apellido y nombre	Firma	Cédula

Ejercicio 1

Consideremos la ecuación diferencial

$$\text{(E)} \qquad \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{sen}(x) + \operatorname{sen}(y) \\ e^x + y - 1 \end{pmatrix}.$$

1. Pruebe que $(0,0)$ es punto de equilibrio y linealice la ecuación alrededor de $(0,0)$.

   Solución: Si $f(x,y) = (\operatorname{sen}(x) + \operatorname{sen}(y), e^x + y - 1)$, es claro que $f(0,0) = (0,0)$. Esto muestra que $(0,0)$ es punto de equilibrio. La matriz jacobiana de f en un punto (x,y) es

   $$Jf(x,y) = \begin{pmatrix} \cos(x) & \cos(y) \\ e^x & 1 \end{pmatrix},$$

   por lo que

   $$Jf(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

   y la ecuación linealizada alrededor de $(0,0)$ queda

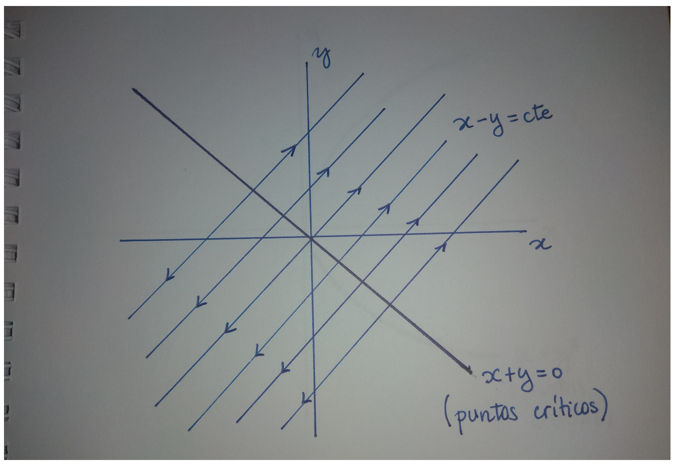
   $$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

2. Dibuje el diagrama de fases de la ecuación lineal.

   Solución: Escribamos la ecuación lineal como el sistema lineal de ecuaciones

   $$\begin{cases} \dot{x} &= x + y \\ \dot{y} &= x + y \end{cases}$$

Los puntos de equilibrio de la ecuación son aquéllos de la recta $x+y=0$. Además, $\frac{d}{dt}(x-y) = \dot{x}-\dot{y} = 0$, por lo que las rectas $x-y=cte$ son invariantes. Cada una de estas rectas debe corresponder a tres trayectorias: el punto de equilibrio y dos semirrectas. Mirando el signo del vector velocidad $(\dot{x}, \dot{y})$ en cada uno de los semiplanos determinados por la recta de puntos de equilibrio, podemos orientar las trayectorias no estacionarias, con lo cual vemos que el diagrama de fases es:



3. Estudie la estabilidad de $(0,0)$ para la ecuación (E).

   Solución: La matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ tiene valores propios 2 y 0. Como el valor propio 2 es real y positivo, el punto crítico $(0,0)$ es inestable tanto para la ecuación lineal como para la ecuación no lineal (E).

Ejercicio 2

Sea $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $f(x,y) = (x^2+y, 3x^4+3x^2y)$. Consideremos la ecuación diferencial autónoma

$$(\dot{x}, \dot{y}) = f(x,y).$$

1. Encuentre los puntos de equilibrio.

   Solución: Los puntos de equilibrio de la ecuación son las soluciones de

$$\begin{cases} x^2+y & = & 0 \\ 3x^4+3x^2y & = & 0 \end{cases},$$

   que son los puntos de la parábola $x^2+y=0$.

2. Definimos $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ por $H(x, y) = x^n - y$, $n \in \mathbb{N}$. Halle n de modo que las curvas de nivel de H contengan a las curvas solución de la ecuación.

   Solución: Tenemos que hallar n para que H sea una preintegral de la ecuación, es decir, de modo que

   $$\frac{d}{dt} H(x(t), y(t)) = \nabla H(x, y) \cdot (\dot{x}, \dot{y}) = 0.$$

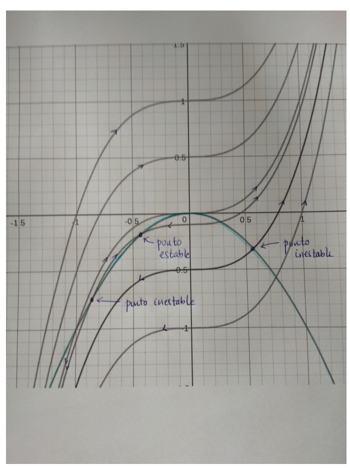
   Esto es
   $$nx^{n-1}(x^2 + y) - (3x^4 + 3x^2 y) = 0.$$

   Esto es un polinomio en x, y, por lo que para que sea 0 todos sus monomios deben tener coeficientes nulos. Esto sucede si y sólo si $n = 3$.

3. Dibuje el diagrama de fases de la ecuación.

   Solución:

   Observemos que cada curva de nivel de la función H corta a la parábola de puntos de equilibrio en exactamente dos puntos. Por lo tanto, corresponde a exactamente tres trayectorias: la de equilibrio y una a cada lado de $x^2 + y = 0$. Para orientar estas últimas, alcanza con mirar la dirección en que apunta el vector velocidad en un punto de cada una de ellas.



4. Indique si los puntos de equilibrio son estables, inestables o asintóticamente estables.

Solución: Llamemos P a la parábola de puntos de equilibrio, de ecuación $y = -x^2$. La curva de nivel c de la función H (es decir, la curva de ecuación $y = x^3 + c$), corta a P en uno, dos o tres puntos. Cuando $c > 0$, $H^{-1}(c) \cap P$ consta de un punto. Ese punto es inestable, pues las otras dos trayectorias contenidas en $H^{-1}(c)$ se alejan de él yéndose a infinito. Para $c = 0$ y otro valor $c_0 < 0$, $H^{-1}(c) \cap P$ consta de dos puntos. ($c_0 = -\frac{4}{27}$, pero esto no importa a los efectos del argumento). Estos puntos también son inestables, pues una de las dos trayectorias contenidas en $H^{-1}(c)$ se aleja de él yéndose a infinito. Para $0 > c > c_0$, $H^{-1}(c) \cap P$ consta de tres puntos.El que está más a la izquierda (i.e. tiene menor ordenada) y el que está más a la derecha son inestables por un argumento similar al anterior. El del medio es estable, lo cual se puede observar en el diagrama. En definitiva, hay en la parábola P un pequeño arco de puntos estables. (Se puede calcular, es el arco que va de $(-\frac{2}{3}, -\frac{4}{9})$ a $(0, 0)$).

Ejercicio 3

Consideremos la función periódica de período 2π definida en $[0, \pi]$ como sigue:

$$f(x) = \begin{cases} x & x \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ \pi - x & x \in [\frac{\pi}{2}, \pi] \end{cases}$$

y que verifica que $f(x) = -f(-x)$ para $x \in [-\pi, 0]$.

1. Grafique la función f en $[-\pi, \pi]$.

2. Encuentre el desarrollo de Fourier de f.

3. Calcule $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx$ y concluya así el valor de la serie $\sum_{k=1}^{\infty} b_k^2$. Los b_k son los coeficientes en el desarrollo de senos de f. Justifique su respuesta.

4. Encuentre una solución formal de la ecuación diferencial parcial

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} & u : \mathbb{R}^+ \times [-\pi, \pi] \to \mathbb{R} \\ u(0, x) = f(x) & x \in [-\pi, \pi] \\ u(t, -\pi) = u(t, \pi) = 0 & t \in \mathbb{R}^+ \end{cases}$$

5. Argumente para demostrar que en efecto la función encontrada es una solución.

Solución:

En primer lugar como la función es impar solo tiene coeficientes diferentes de cero para la base de senos. Entonces

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(kx)dx$$

$$= \frac{2}{\pi}[\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin(kx)dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\pi - x)\sin(kx)dx].$$

Pero

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\pi - x)\sin(kx)dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} u\sin k(\pi - u)(-du) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} u\sin k(\pi - u)du$$

$$= (-1)^{k+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} u\sin(ku)du.$$

De donde se puede concluir

$$b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1 - (-1)^k)x\sin(kx)dx.$$

Entonces $b_{2j} = 0$ y además

$$b_{2j+1} = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin((2j+1)x)dx.$$

Calculemos más generalmente

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin(kx)dx = -\frac{x\cos(kx)}{k}|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{k}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(kx)dx$$

$$= -\frac{x\cos(kx)}{k}|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{\sin(kx)}{k^2}|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{\pi\cos(\frac{k\pi}{2})}{2k} + \frac{\sin(\frac{k\pi}{2})}{k^2}.$$

Hay que evaluar para $k = 2j+1$, el primer sumando vale cero y el segundo vale $\frac{(-1)^j}{(2j+1)^2}$. De esta forma

$$b_{2j+1} = \frac{4}{\pi}\frac{(-1)^j}{(2j+1)^2}.$$

Obteniendo

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j}{(2j+1)^2}\cos(2j+1)x.$$

Ahora podemos calcular

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = 2\int_0^{\pi} |f(x)|^2 dx = 2[\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\pi - x)^2 dx]$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 dx = \frac{\pi^3}{6}.$$

Además

$$\frac{\pi^3}{6} = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \frac{16}{\pi^2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2j+1)^4} \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(2j+1)x dx = \frac{16}{\pi} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2j+1)^4}.$$

Entonces

$$\frac{\pi^4}{96} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2j+1)^4}.$$

Pasemos ahora a la ecuación del calor. Postulamos la solución de la forma

$$u(t,x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k(t)\cos(kx) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k(t)\sin(kx).$$

Derivando término a término obtenemos

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \sum_{k=1}^{\infty} a'_k(t)\cos(kx) + \sum_{k=1}^{\infty} b'_k(t)\sin(kx).$$

Además

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial^2 x} = -\sum_{k=1}^{\infty} (a_k(t)\cos(kx) + b_k(t)\sin(kx))$$

Usando la ecuación e igualando los términos de la serie obtenemos la siguiente cadena de ecuaciones diferenciales de primer orden

$$a'_k(t) = -\frac{1}{2}a_k(t)k^2 \quad b'_k(t) = -\frac{1}{2}b_k(t)k^2 \quad k \geq 1.$$

Resolviendo se obtiene

$$a_k(t) = a_k(0)e^{-\frac{1}{2}k^2 t} \quad b_k(t) = b_k(0)e^{-\frac{1}{2}k^2 t}.$$

Esto nos permite escribir

$$u(t,x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k(0)e^{-\frac{1}{2}k^2 t}\cos(kx) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k(0)e^{-\frac{1}{2}k^2 t}\sin(kx).$$

Por otra parte al hacer $t=0$ y usar la condición inicial se tiene

$$u(0,x)=f(x)=\frac{4}{\pi}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j}{(2j+1)^2}\cos(2j+1)x,$$

luego $a_k(0)=0,\ k\geq 1$ y también $a_0=0$. Así por inspección $a_k(t)=0,\ k\geq 1$ y

$$b_{2j+1}(t)=\frac{(-1)^j}{(2j+1)^2}e^{-\frac{1}{2}(2j+1)^2 t}.$$

La candidata a solución es

$$u(t,x)=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j}{(2j+1)^2}e^{-\frac{1}{2}(2j+1)^2 t}\sin(2j+1)x.$$

Para demostrar que efectivamente esta función es la solución basta con ver que podemos pasar dentro del signo de suma el límite cuando $t\to 0$, por el teorema de Weierstrass. También con los mismos argumentos se demuestra que se puede derivar término a término la serie que define u.

Elija uno y sólo uno de los siguientes ejercicios:

Ejercicio 4

Sea la densidad Gaussiana estándar definida como $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}$. Recordemos que $\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)dx=1$.

1. Se quiere calcular la transformada de Fourier de φ, esto es, la función

$$\hat{\varphi}(\gamma)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\gamma x}\varphi(x)\,dx.$$

Derive $\hat{\varphi}$ con respecto a la variable γ e integrando luego por partes demuestre que se satisface la siguiente ecuación diferencial lineal:

$$\hat{\varphi}'(\gamma)=-\hat{\varphi}(\gamma)\gamma.$$

Solución:

$\hat{\varphi}'(\gamma)=\int_{-\infty}^{+\infty}(-ix)e^{-i\gamma x}\varphi(x)\,dx=\int_{-\infty}^{+\infty}(-ix)e^{-i\gamma x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$. Integrando por partes, tomando $u=\frac{i}{\sqrt{2\pi}}e^{-i\gamma x}$ y $v'=-xe^{\frac{-x^2}{2}}$, se tiene

$$\hat{\varphi}'(\gamma)=\frac{i}{\sqrt{2\pi}}e^{-i\gamma x}e^{-\frac{x^2}{2}}|_{-\infty}^{+\infty}-\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\gamma}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}e^{-i\gamma x}\,dx=0-\gamma\hat{\varphi}(\gamma).$$

2. Resuelva esta ecuación y use la condición inicial $\hat{\varphi}(0)$ para obtener la transforma de Fourier φ. Resolviendo esta ecuación por el método de variables separables se obtiene la solución general

$$\hat{\varphi}(\gamma) = Ce^{\frac{-\gamma^2}{2}},$$

con $C \in \mathbb{R}$. La condición inicial $\hat{\varphi}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\, dx = 1$ nos dice que $C = 1$.

3. La densidad de una Gaussiana con media μ y varanza σ^2 es

$$\varphi_{\mu.\sigma^2}(x) = \frac{1}{\sigma}\varphi(\frac{x-\mu}{\sigma}).$$

Use lo anterior y un cambio de variable conveniente para calcular la transformada de Fourier de esta función.

Solución:

$\hat{\varphi}_{\mu,\sigma^2}(\gamma) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\gamma x}\frac{1}{\sigma}\varphi(\frac{x-\mu}{\sigma})\, dx$. Haciendo el cambio de variable $u = \frac{x-\mu}{\sigma}$ obtenemos

$$\hat{\varphi}_{\mu,\sigma^2}(\gamma) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\gamma(\sigma u+\mu)}\varphi(u)\, du = e^{-i\gamma\mu}\hat{\varphi}(\sigma\gamma).$$

Ejercicio 5

Consideremos la ecuación diferencial

$$(E) \qquad \ddot{x} = -x$$

con las condiciones iniciales $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 1$.

1. Escriba la ecuación anterior en la forma de una ecuación diferencial vectorial de orden uno

$$(E') \qquad \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

con la condición inicial correspondiente.

Solución: Agregando la variable $y = \dot{x}$ la ecuación se transforma en

$$\begin{cases} \dot{x} &= & y \\ \dot{y} &= & -x \end{cases}$$

Es decir, $F(x, y) = (y, -x)$. La condición inicial es $(x(0), y(0)) = (0, 1)$.

2. Escriba la expresión del operador de Picard T y la ecuación integral $X = T(X)$ que es equivalente a (E').

   Si $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\varphi(t) = (x(t), y(t))$, es una función continua, $T(\varphi)$ está dada por

$$(T(\varphi))(t) = (0,1) + \int_0^t F(\varphi(t))\,dt = (0,1) + \int_0^t (y(t), -x(t))\,dt.$$

3. Usaremos el método de las aproximaciones sucesivas para aproximar la solución de (E'), y por lo tanto de (E). Explique cómo se obtiene una sucesión de funciones que converge a la solución de (E'), y cómo se obtiene una sucesión de funciones que converge a la solución de (E). (No es necesario demostrar los teoremas que se usan).

   Solución: Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo acotado que contiene al 0. Comenzando con cualquier función continua y acotada φ_0 de I en $\mathbb{R}^2$ se obtiene una sucesión $T^n(\varphi_0)$ de funciones continuas y acotadas iterando el operador de Picard a partir de φ_0. Esta sucesión converge uniformemente a una solución de (E') en I. Si $T^n(\varphi_0)(t) = (x_n(t), y_n(t))$, la sucesión de funciones $x_n : I \to \mathbb{R}$ converge uniformemente a una solución de (E) en I.

4. Calcule los primeros términos de las sucesiones arriba mencionadas hasta darse cuenta de cómo son sus términos n-ésimos, para todo n. Verifique que la sucesión de funciones que aproxima la solución de (E) converge puntualmente a la verdadera solución.

   Solución: Tomemos por ejemplo $\varphi_0(t) = (0,0)$ la función constante igual a $(0,0)$.

$$\begin{array}{lllllll}
T(\varphi_0)(t) & = & (x_1(t), y_1(t)) & = & (0,1) + \int_0^t (0,0)\,dt & = & (0,1) \\
T^2(\varphi_0)(t) & = & (x_2(t), y_2(t)) & = & (0,1) + \int_0^t (1,0)\,dt & = & (t,1) \\
T^3(\varphi_0)(t) & = & (x_3(t), y_3(t)) & = & (0,1) + \int_0^t (1,-t)\,dt & = & (t, 1-\frac{t^2}{2}) \\
T^4(\varphi_0)(t) & = & (x_4(t), y_4(t)) & = & (0,1) + \int_0^t (1-\frac{t^2}{2}, -t)\,dt & = & (t-\frac{t^3}{3!}, 1-\frac{t^2}{2})
\end{array}$$

   Vemos que en la primera coordenada empieza a aparecer el desarrollo de Taylor en 0 de la función seno y en la segunda el de la función coseno. Entonces $(x_n(t), y_n(t)) \longrightarrow (\operatorname{sen}(t), \cos(t))$, que es la solución de (E'), y en particular x_n converge a la función seno que es la solución de (E).