Curso: Int. a las Ecuaciones Diferenciales.

Solución examen 12 de diciembre de 2019.

Ejercicio 1.

1. Buscando soluciones de la forma $u(x,y) = X(x)Y(y)$, la condición $u_{xx} + u_{yy} = 0$ implica $X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = 0$. Por lo tanto
$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = \lambda \text{ (cte)}.$$
Entonces hay que resolver las ecuaciones $X''(x) - \lambda X(x) = 0$ y $Y''(y) + \lambda Y(y) = 0$. Como $u(0,y) = X(0)y(y)$, la condición $u(0,y) = 0$ implica $X(0) = 0$. Análogamente, la condición $u(\pi,y) = 0$ implica $X(\pi) = 0$. Por lo tanto hay que resolver
$$X'' - \lambda X = 0 \text{ con las condiciones } X(\pi) = X(0) = 0.$$
En consecuencia, la forma de $X(x)$ depende del valor de λ. Discutiremos según su signo:

   - Caso (a): $\lambda > 0$.
   Si $\lambda > 0$, existe un $\alpha \in \mathbb{R}^+$ tal que $\lambda = \alpha^2$. Entonces:
   $$X(x) = Ae^{\alpha x} + Be^{-\alpha x}.$$
   Imponiendo las condiciones $X(0) = 0$ y $X(\pi) = 0$ y haciendo cuentas se obtiene $X(x) = 0$ lo que resultaría que la función $u(x,y) = 0$. Dado que queremos una función continua, esto implica que $u(x,0) = 0$, por lo que no es posible cumplir con la condición inicial pedida. Así, descartamos este caso.

   - Caso (b): $\lambda = 0$.
   $\lambda = 0$ implica que $X'' = 0$. Integrando dos veces, obtenemos:
   $$X(x) = Ax + B$$
   Nuevamente, imponiendo las condiciones $X(0) = 0$ y $X(\pi) = 0$ se obtiene $X(x) = 0$, y descartamos este caso por el mismo motivo que antes.

   - Caso(c): $\lambda < 0$. Si λ es negativo, existe algún $\alpha \in \mathbb{R}^+$ tal que $\lambda = -\alpha^2$. Entonces:
   $$X(x) = A\cos(\alpha x) + B\operatorname{sen}(\alpha x).$$
   Imponiendo las condiciones $X(0) = 0$ y $X(\pi) = 0$ se obtiene:
   $$\begin{cases} X(0) = A = 0 \\ X(\pi) = B\operatorname{sen}(\alpha\pi) = 0 \ \Rightarrow B = 0 \text{ o } \operatorname{sen}(\alpha\pi) = 0. \end{cases}$$
   Si consideramos la primera opción, obtenemos la solución trivial. Si se verifica la segunda opción:
   $$\operatorname{sen}(\alpha\pi) = 0 \Rightarrow \alpha\pi = n\pi \Rightarrow \alpha = n,\ n \in \mathbb{Z}.$$
   $$\Rightarrow X(x) = B\operatorname{sen}(nx).$$
   Por lo tanto, en este último caso obtenemos una solución no trivial en $X(x)$.

   Resumiendo, resolviendo la ecuación $X'' - \lambda X = 0$ tenemos que $X(x) = A_n\operatorname{sen}(nx)$ y que $\lambda = -n^2$ con $n \in \mathbb{N}$.

La ecuación $Y''(y) - n^2Y(y) = 0$ tiene como solución $Y(y) = B_n e^{ny} + C_n e^{-ny}$. La condición $u(x,\pi) = 0$ implica $Y(\pi) = 0$, por lo tanto $Y(\pi) = B_n e^{n\pi} + C_n e^{-n\pi} = 0$ implica que $B_n = -C_n e^{-2n\pi}$. Entonces

$$Y(y) = -C_n e^{-2n\pi} e^{ny} + C_n e^{-ny} = C_n(-e^{n(y-2\pi)} + e^{-ny}).$$

Por lo tanto, tenemos que:

$$u_n(x,y) = \operatorname{sen}(nx) D_n(-e^{n(y-2\pi)} + e^{-ny}) \text{ donde } D_n = A_n C_n.$$

Si consideramos $u(x,y) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,y)$, entonces la condición $u(x,0) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(nx)}{n^2}$ implica que:

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n(1 - e^{-2n\pi}) \operatorname{sen}(nx) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(nx)}{n^2}.$$

que se cumple trivialmente si $D_n(1 - e^{-2n\pi}) = \frac{1}{n^2}$. Despejando, obtenemos

$$D_n = \frac{1}{(1 - e^{-2n\pi})n^2}.$$

Entonces el candidato a solución es:

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1 - e^{-2n\pi})n^2} \operatorname{sen}(nx)(-e^{n(y-2\pi)} + e^{-ny}).$$

2. Para probar que u es continua, basta con probar que $u(x,y) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,y)$ converge uniformemente, ya que $u_n(x,y)$ es continua para todo $n \in \mathbb{N}$ y para todo $(x,y) \in [0,\pi] \times [0,\pi]$. Como:

$$|u_n(x,y)| = \left| \frac{1}{(1 - e^{-2n\pi})n^2} \operatorname{sen}(nx)(-e^{n(y-2\pi)} + e^{-ny}) \right| \leq \frac{C}{n^2}.$$

Entonces por el criterio mayorante de Weiestrass se tiene que $u(x,y) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,y)$ converge uniformemente.

Probemos ahora que $\displaystyle\frac{\partial}{\partial x} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial u_n(x,y)}{\partial x}$. Para esto necesitamos de los siguientes resultados:

Proposición 0.1. *Sea $\{u_n\}$ una sucesión de funciones $u_n : X \to \mathbb{R}$ que verifica:*

- *$|u_n(x,y)| \leq M_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y para todo $(x,y) \in X$,*
- *la serie $\sum M_n$ es convergente*

Entonces existe $u : X \to \mathbb{R}$ tal que $\sum u_n(x,y)$ converge uniformemente a u.

Proposición 0.2. *Sea $\{u_n\}$ una sucesión de funciones $u_n : X \to \mathbb{R}$ de clase C^1 que verifica:*

- *Existe $(x_0,y_0) \in X$ tal que $\sum u_n(x_0,y_0)$ es convergente.*
- *la serie $\sum \frac{\partial}{\partial x} u_n(x,y)$ converge uniformemente a una función v.*

Entonces $\frac{\partial}{\partial x} \sum u_n(x,y) = \sum \frac{\partial}{\partial x} u_n(x,y)$.

En nuestro caso, tenemos:

$$\frac{\partial u_n}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{(1 - e^{-2n\pi})n^2} n \cos(nx)(-e^{n(y-2\pi)} + e^{-ny}),$$

Para $\delta > 0$ consideremos los puntos (x, y) en el interior del rectángulo $[0, \pi] \times [\delta, \pi]$. Como $y \geq \delta$, tenemos que

$$e^{-ny} \leq e^{-n\delta}.$$

A su vez, como $y \leq \pi$, tenemos que $y - 2\pi \leq -\pi$, por lo que

$$e^{n(y-2\pi)} \leq e^{-n\pi}.$$

Luego, podemos acotar de la siguiente manera:

$$\left|\frac{\partial u_n}{\partial x}(x, y)\right| \leq \left|\frac{1}{(1 - e^{-2n\pi})n^2}\right| n(e^{-n\pi} + e^{-n\delta}) \leq \frac{2}{n}(e^{-n\pi} + e^{-n\delta}) = M_n.$$

Como $\sum M_n$ es convergente, podemos aplicar las Proposiciones 0.1 y 0.2. Finalmente, dado $(x, y) \in (0, \pi) \times (0, \pi)$ consideramos $\delta > 0$ tal que $y > \delta > 0$. Haciendo el razonamiento anterior, tenemos probado que $\frac{\partial}{\partial x} \sum u_n(x, y) = \sum \frac{\partial}{\partial x} u_n(x, y)$. Por lo tanto, esta última igualdad está probada para todo $(x, y) \in (0, \pi) \times (0, \pi)$.

Ejercicio 2.

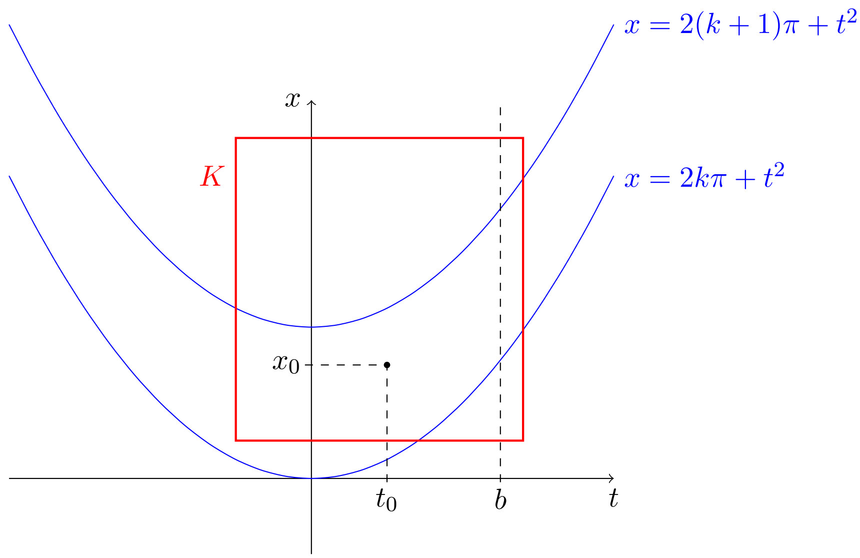
1. Como la función $f(x, t) = 2t \cos(x - t^2)$ es de clase C^1 en todo punto de $\mathbb{R}^2$, por el Teorema de Picard se tiene que hay solución única. Luego, por el Teorema de la existencia del intervalo maximal, hay una única solución maximal.

2. Si $x(t) = a + t^2$ es solución, entonces debe cumplirse que $x'(t) = 2t = 2t \cos(a + t^2 - t^2)$. Luego $2t(1 - \cos(a)) = 0$. Entonces $a = 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$ y por lo tanto $x(t) = 2k\pi + t^2$ es solución.

3. Sea x una solución maximal con $x(t_0) = x_0$. Si $x_0 = 2k\pi + t_0^2$ para algún $k \in \mathbb{Z}$, entonces la solución es $x(t) = 2k\pi + t^2$, que está definida para todo $t \in \mathbb{R}$. Si $x_0 \neq 2k\pi + t_0^2$, entonces existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que

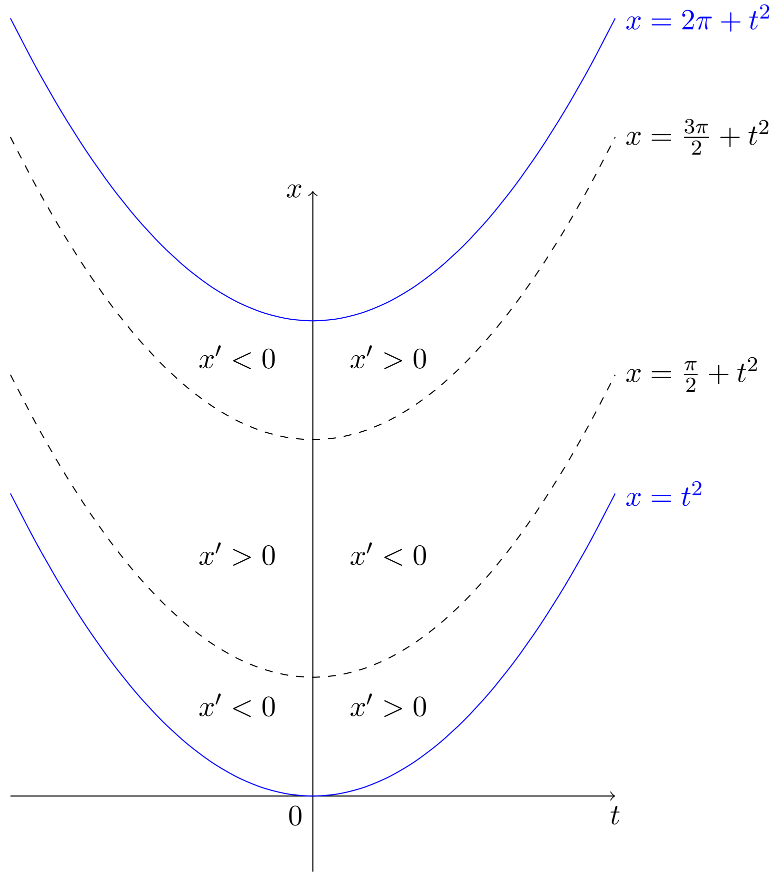
$$2k\pi + t^2 < x(t) < 2(k + 1)\pi + t^2 \ \ \forall t$$

ya que por Picard el gráfico de dos soluciones distintas no puede cortarse. Supongamos que el intervalo maximal de x es de la forma (a, b) con $b < +\infty$ y consideremos el compacto K como en la figura:



Entonces, dado que la solución debe mantenerse entre las parábolas $2k\pi + t^2$ y $2(k+1)\pi + t^2$, resulta que $(t, x(t)) \in K$ para todo $t \in (t_0, b)$, contradiciendo el Teorema de Escape de Compactos. Por lo tanto, $b = +\infty$. Razonando análogamente se prueba que $a = -\infty$.

4. Para estudiar el signo de x' hay que estudiar el signo de $2t$ y el signo de $\cos(x - t^2)$. El primero es trivial, mientras que el segundo es positivo si $x - t^2 \in (0, \pi/2) \cup (3\pi/2, 2\pi)$ y negativo si $x - t^2 \in (\pi/2, 3\pi/2)$ (nos estamos restringiendo a la franja $x - t^2 \in (0, 2\pi)$ ya que en el resto del plano la situación es análoga). En la figura se muestra entonces como queda el signo de x' según cada región del plano:



La derivada se anula en $t = 0$ y en los puntos en que $x = t^2 + \pi/2$ o $x = t^2 + 3\pi/2$. Por los signos de la derivada es fácil ver que los puntos sobre la parábola $x = t^2 + \pi/2$ (con $t \neq 0$) son mínimos, mientras que los de la parábola $x = t^2 + 3\pi/2$ (con $t \neq 0$) son máximos. Esto también puede verse calculando la derivada segunda:

$$x'' = 2\left[\cos(x - t^2) - t\,\mathrm{sen}(x - t^2)(x' - 2t)\right]$$

En los puntos con $x' = 0$ resulta:

$$x'' = 2\left[\cos(x - t^2) + 2t^2\,\mathrm{sen}(x - t^2)\right]$$

Así, en la parábola $x = t^2 + \pi/2$ tenemos $\cos(x - t^2) = 0$ y $\mathrm{sen}(x - t^2) = 1$, por lo que $x'' = 4t^2 > 0$, confirmando que hay mínimos ahí. Análogamente se puede ver que hay máximos en la otra parábola.

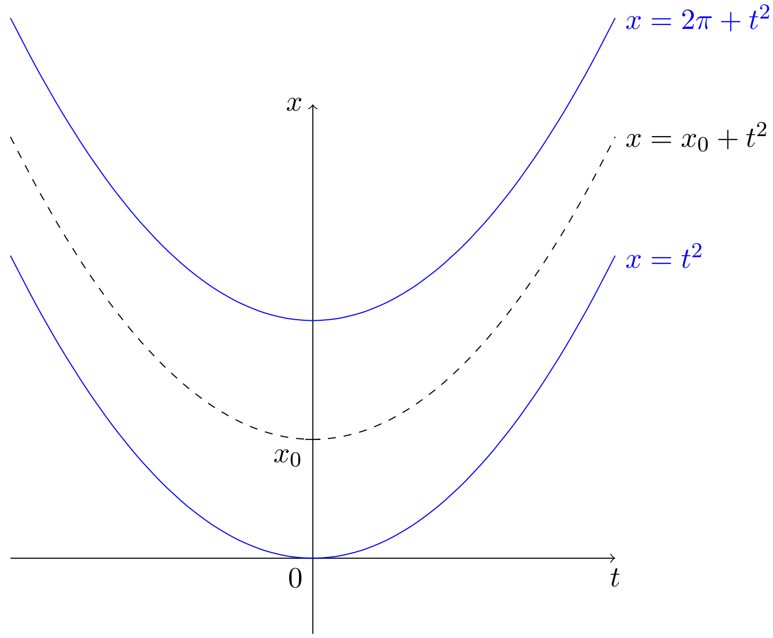
También estudiando el signo de x' o calculando x'', es fácil ver que en $t = 0$ hay máximos en la región entre $\pi/2$ y $3\pi/2$, y mínimos en las regiones $(0, \pi/2)$ y $(3\pi/2, 2\pi)$.

5. Estudiaremos el signo de $\varphi'(t)$:

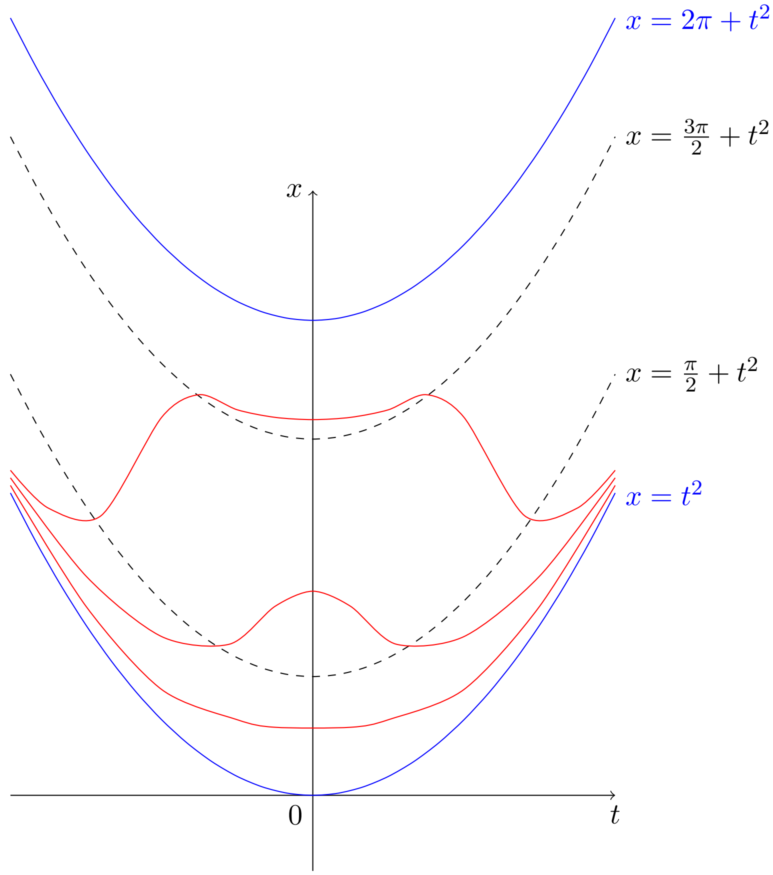
$$\varphi'(t) = (x(t) - t^2)' = x'(t) - 2t = 2t\cos(x(t) - t^2) - 2t = 2t(\cos(x(t) - t^2) - 1).$$

Sabemos que $\cos(x(t) - t^2) - 1 \leq 0$. Además, como la solución no puede cortar a las parábolas donde $\cos(x(t) - t^2) = 1$ (ya que son las soluciones halladas en la parte 2.), tenemos que $\cos(x(t) - t^2) - 1 < 0$. Por lo tanto, el signo de $\varphi'(t)$ es menor a 0 si $t > 0$ y mayor a 0 si $t < 0$, y entonces φ es decreciente para $t > 0$ y creciente para $t < 0$. Así, φ alcanza su máximo en $t = 0$.

Si consideramos una solución con $x(0) = x_0 \in (0, 2\pi)$, por lo que ya dijimos sobre la imposibilidad de que gráficos de soluciones distintas se corten tenemos que $t^2 < x(t) < t^2 + 2\pi$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Así, $\varphi(t) = x(t) - t^2 \in (0, 2\pi)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Por lo tanto, $\varphi(t)$ mide la distancia punto a punto entre el gráfico de la solución y la parábola $x = t^2$. Por lo que acabamos de probar, esta distancia es máxima en $t = 0$. Así, el gráfico de la solución debe mantenerse siempre a una distancia menor que x_0 de la parábola $x = t^2$, lo que es equivalente a decir que debe mantenerse por debajo de la parábola $x = x_0 + t^2$ (ver figura).



6. Con todo lo que hemos probado hasta ahora estamos en condiciones de hacer un esbozo del gráfico de las soluciones:



Ejercicio 3.
Ver notas del curso 2019.