Universidad de la República - Facultad de Ingeniería - IMERL.
Curso: Ecuaciones Diferenciales (2018).

EXAMEN - 12 DE DICIEMBRE DE 2019. DURACIÓN: 4:00 HS.

No. Examen	Apellido y nombre	Cédula	Firma

PARA USO DOCENTE			
Ej 1	Ej 2	Ej 3	**Total**

Ejercicio 1. (40 puntos)

1. Se considera el problema:

$$(*)\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0 \quad \text{para todo } (x,y)\in(0,\pi)\times(0,\pi), \\ u(0,y)=0 \text{ y } u(\pi,y)=0 \quad \text{para todo } y\in[0,\pi], \\ u(x,\pi)=0 \quad \text{para todo } x\in[0,\pi] \\ u(x,0)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\operatorname{sen}(nx)}{n^2} \quad \text{para todo } x\in[0,\pi], \\ u \text{ de clase } C^2 \text{ en } (0,\pi)\times(0,\pi) \text{ y continua en } [0,\pi]\times[0,\pi]. \end{cases}$$

   Buscando soluciones de la forma $X(x)Y(y)$, hallar un candidato a solución u de $(*)$ que se exprese como:

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x,y). \qquad \text{(20 puntos)}$$

2. Probar que el candidato a solución u hallado en 1. verifica las siguientes condiciones:

   a) u es continua en $[0,\pi]\times[0,\pi]$. (7 puntos)

   b) $\dfrac{\partial}{\partial x}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\partial}{\partial x}u_n(x,y)\cdot$ (13 puntos)

   Si se usa un resultado se debe enunciar. Solo enunciar, NO demostrar.

Ejercicio 2. (40 puntos)

Consideremos la ecuación $x'=2t\cos(x-t^2)$.

1. Probar que, para cada punto $(t_0,x_0)\in\mathbb{R}^2$, existe una única solución maximal con $x(t_0)=x_0$. (6 puntos)
2. Buscar soluciones de la forma $x(t)=a+t^2$, con $a\in\mathbb{R}$. (6 puntos)
3. Probar que el intervalo maximal de cualquier solución maximal es $\mathbb{R}$. (6 puntos)
4. Estudiar el signo de x' y clasificar los puntos donde se anula (decir si son máximos, mínimos o puntos silla). (6 puntos)
5. Si $x(t)$ es solución de la ecuación, probar que $\varphi(t)=x(t)-t^2$ es decreciente para $t>0$ y creciente para $t<0$. Deducir que $\varphi(t)$ alcanza su máximo en $t=0$, y que el gráfico de cualquier solución con condición inicial $x(0)=x_0\in(0,2\pi)$ está por debajo de la parábola de ecuación $x=x_0+t^2$. (8 puntos)
6. Realizar un bosquejo del gráfico las soluciones. (8 puntos)

Ejercicio 3. (20 puntos)

Sea $f_n : M\to\mathbb{R}$ una sucesión de funciones.

1. Definir convergencia uniforme. (5 puntos)
2. Probar que si f_n converge uniformemente a f y f_n es continua para todo $n\in\mathbb{N}$, entonces f es continua. (15 puntos)