Ecuaciones Diferenciales

Examen, 26 de julio de 2018

Solución

Ejercicio 1.

a) Si escribimos

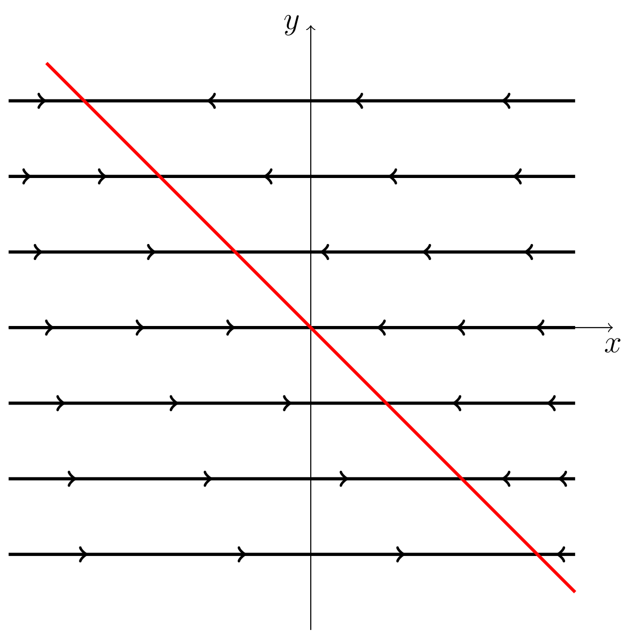
$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

entonces la ecuación diferencial queda:

$$\begin{cases} \dot{x} & = & -x - y \\ \dot{y} & = & 0 \end{cases}$$

De la segunda ecuación obtenemos $y(t) = y_0$, y sustituyendo en la primera, nos queda $\dot{x} = -x - y_0$, cuya solución es $x(t) = (x_0 + y_0)e^{-t} - y_0$. Esta solución es la suma de una solución a la ecuación homogénea ($(x_0 + y_0)e^{-t}$) más una solución particular ($-y_0$).

A partir de las soluciones obtenidas podemos esbozar un diagrama de fase para la ecuación:



Los puntos de equilibrio se encuentran en la recta de ecuación $y = -x$. La coordenada y de la solución se mantiene constante en el valor inicial y_0, mientras que la coordenada x tiende a $-y_0$ cuando $t \to +\infty$.

El origen es entonces un punto de equilibrio estable (toda solución con condición inicial a menos de ϵ del origen se mantiene a menos de ϵ para todo t) pero no asintóticamente estable, ya que no es aislado.

b) Si escribimos

$$Y(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

entonces la ecuación diferencial queda:

$$\begin{cases} \dot{x} &= 0 \\ \dot{y} &= -x - y \\ \dot{z} &= xe^t + ye^t + z \end{cases}$$

De la primera ecuación obtenemos $x(t) = x_0$, y sustituyendo en la segunda, nos queda $\dot{y} = -x_0 - y$, cuya solución es $y(t) = (x_0 + y_0)e^{-t} - x_0$. Estas soluciones son análogas a las de la parte a).

Utilizando esta información, la última ecuación queda:

$$\dot{z} = x_0 e^t + \left((x_0 + y_0)e^{-t} - x_0\right) e^t + z = x_0 + y_0 + z$$

cuya solución es $z(t) = (x_0 + y_0 + z_0)e^t - (x_0 + y_0)$. Análogamente a la parte a), esta solución puede obtenerse como la suma de una solución a la ecuación homogénea y una solución particular.

Así, podemos concluir que el origen es inestable. En efecto, cualquier solución con condición inicial $x_0 = y_0 = 0$ y $z_0 \neq 0$ tiene como tercera coordenada $z(t) = z_0 e^t$, que tiende a $+\infty$ cuando $t \to +\infty$. Así, existen soluciones con condición inicial tan cerca del origen como se quiera que se escapan de cualquier entorno del mismo.

Ejercicio 2.

Recordemos que x_0 es asintóticamente estable si es estable y además existe $\delta > 0$ tal que toda solución con condición inicial $x_e \in \mathcal{B}(x_0; \delta)$ cumple $\lim\limits_{t \to +\infty} x(t) = x_0$. Así, bajo nuestras hipótesis, x_0 no puede ser asintóticamente estable, ya que tan cerca de él como queramos podemos encontrar soluciones que no tienden al punto (aquellas tal que $x(t) = x_1$ para todo t, con x_1 otro punto crítico distinto de x_0).

Ejercicio 3.

(a) Dado que $f(x) = (x - 1)\operatorname{sen}(x)$ es una función $C^1(\mathbb{R})$, aplicando el Teorema de Picard tenemos que la solución existe y es única para cada condición inicial (t_0, x_0) dada.

Para conocer cuál es el intervalo maximal de cada solución, buscamos primero soluciones estacionarias, es decir, $x(t) = k$ para todo t. Sustituyendo en la ecuación diferencial nos queda

$$0 = (k - 1)\operatorname{sen}(k),$$

por lo que las soluciones estacionarias son funciones constantes $x(t) = k$ con $k \in \{n\pi : n \in \mathbb{Z}\} \cup \{1\}$.

Sea $x(t)$ la solución a la ecuación diferencial con condiciones iniciales (t_0, x_0) e intervalo maximal I. El objetivo será demostrar que para toda solución x, $I = \mathbb{R}$. Si es una solución estacionaria, es claro que su intervalo maximal es $\mathbb{R}$. Si no lo es, existen dos soluciones estacionarias x_1 y x_2 tal que $x_1 < x_0 < x_2$.

Sea $R \in \mathbb{R}^+$ y consideremos la familia de compactos $\{K_R\}_{R\in\mathbb{R}^+}$ dada por $K_R = [-R, R]\times [x_1, x_2]$, como se ve en la Figura 1. Por el Teorema de Escape de compactos, el gráfico de x

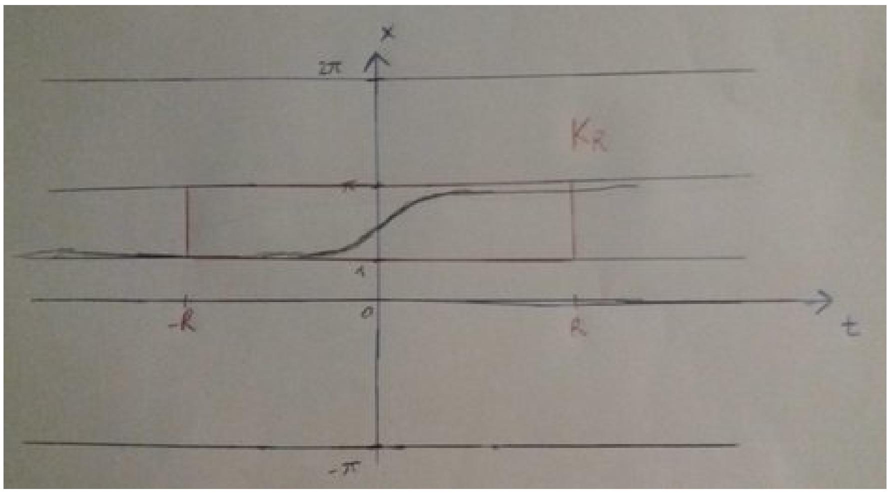


FIGURA 1. Compacto K_R y diagrama de fase.

debe escaparse de K_R. Debido a que la ecuación es estacionaria, por el Teorema de Picard el gráfico de dos soluciones distintas no puede intersectarse. Así, el gráfico de debe escaparse por el lado del tiempo, es decir, x debe estar definida para un $t_1 < -R$ y un $t_2 > R$. Como este razonamiento vale para todo $R \in \mathbb{R}^+$, concluimos que el intervalo maximal de cualquier solución debe ser todo $\mathbb{R}$.

(b) Tratemos de aplicar el Teorema de Hartman en los puntos de equilibrio calculados en la parte anterior. Si llamamos $f(x) = (x-1)\operatorname{sen}(x)$, entonces $f'(x) = \operatorname{sen}(x) + (x-1)\cos(x)$.

En particular, tenemos que $f'(1) = \operatorname{sen}(1) > 0$ y que $f'(n\pi) = (n\pi-1)(-1)^n$. La siguiente tabla, analiza el signo de $f'(n\pi)$ en función del signo y la paridad de n:

	n par	n impar
$n > 0$	$f'(n\pi) > 0$	$f'(n\pi) < 0$
$n < 0$	$f'(n\pi) < 0$	$f'(n\pi) > 0$

Por el Teorema de Hartman, los puntos asintóticamente estables van a ser aquellos en los que $f'(x_0) < 0$ y los puntos inestables los que tengan $f'(x_0) > 0$.

Se concluye entonces que los puntos atóticamente estables son los puntos del conjunto $\{n\pi : n \leq 0,\, n \text{ par}\} \cup \{n\pi : n > 0,\, n \text{ impar}\}$ y los puntos inestables son los puntos del conjunto $\{n\pi : n > 0,\, n \text{ par}\} \cup \{n\pi : n < 0,\, n \text{ impar}\} \cup \{1\}$.

Ejercicio 4.

A partir del método de separación de variables, sabemos que las funciones de la forma

$$u_k(x,t) = A_k e^{-\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 t} \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{L}x\right)$$

con $k \in \mathbb{Z}$ son solución a la ecuación $u_t = u_{xx}$ con condiciones de borde $u(0,t) = u(L,t) = 0$ y condición inicial $u_k(x,0) = A_k \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{L}x\right)$. Como además $u_t = u_{xx}$ es una ecuación lineal, tenemos que la suma finita de funciones u_k también es solución a la ecuación diferencial con condiciones de borde nulas. Así, la función:

$$u(x,t) = e^{-\left(\frac{-2\pi}{L}\right)^2 t} \operatorname{sen}\left(\frac{-2\pi}{L}x\right) + e^{-\left(\frac{5\pi}{L}\right)^2 t} \operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{L}x\right)$$

es la solución que estamos buscando.