1 a) $\begin{vmatrix} -5-\lambda & 6 \\ -3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \lambda^2+\lambda-2=0 \begin{cases} \lambda=1 \\ \lambda=-2 \end{cases}$ (1)

$\underline{V_1}$ $\underline{\lambda=1}$ $\begin{pmatrix} -6 & 6 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow -x+y=0$ $\boxed{x=y}$

$V_1 = \{(x,y) / x=y\}$ $V_1 = [(1,1)]$

$\underline{V_2}$ $\underline{\lambda=-2}$ $\begin{pmatrix} -3 & 6 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \boxed{x=2y}$

$V_2 = \{(x,y) / x=2y\}$ $V_2 = [(2,1)]$

$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ y

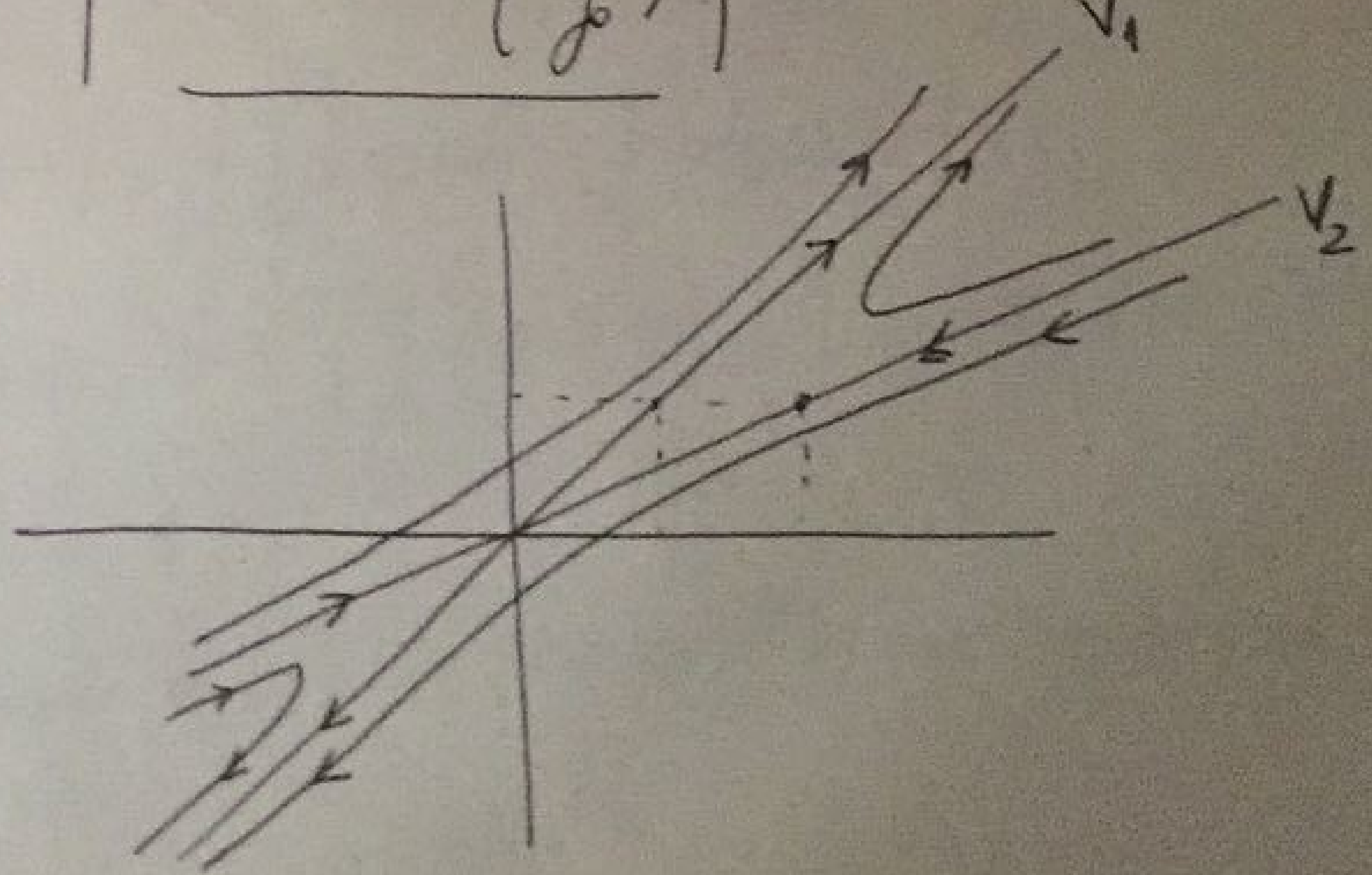
$$\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Entonces $e^{At} = P\begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{pmatrix}P^{-1}$

Haciendo cuentas se obtiene $e^{At} = \begin{pmatrix} -e^t+2e^{-2t} & 2e^t-2e^{-2t} \\ -e^t+e^{-2t} & 2e^t-e^{-2t} \end{pmatrix}$

Solución general $\boxed{\varphi(t) = e^{At}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}}$

diagrama de fase



Como la matriz del sistema tiene un valor propio positivo el origen no es estable. ②

b) La parte lineal del sistema (en un entorno del origen) es el sistema dado en (a). Como los valores propios del sistema dados en a son 1 y -2, utilizando un teorema visto en el curso concluimos que el sistema dado en (b) no es estable. El teorema utilizado es el teorema de Hartman y su corolario.

Ejercicio 2

1) Sea $T(x) = \frac{1}{2} x$ con $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Extiendo T a $\mathbb{R}$ (la llamo T también) de forma continua, o sea $T(x) = \frac{1}{2} x$.

Entonces $\frac{1}{2} x = x \leftrightarrow \underline{x = 0}$. El único punto fijo de la extensión es el 0. Como la T original está definida en $T - \{0\}$ se concluye que no tiene puntos fijos ya que $0 \notin T - \{0\}$.

2) Ver teórico

3) $\underline{a, \varepsilon > 0}$

$$|T\varphi_1(t) - T\varphi_2(t)| = \left| \int_0^t a\varphi_1(s)ds - \int_0^t a\varphi_2(s)ds \right| =$$

$$= \left| a \int_0^t (\varphi_1 - \varphi_2)(s)ds \right| \leq a \left| \int_0^t |\varphi_1 - \varphi_2|(s)\, ds \right| \leq a|t| d(\varphi_1, \varphi_2)$$

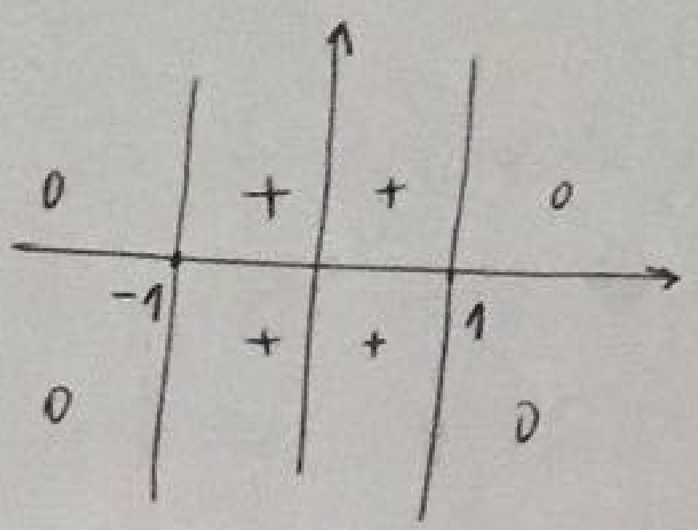
$$\leq a.\varepsilon\, d(\varphi_1, \varphi_2)$$

Entonces tomando $a < \frac{1}{\varepsilon}$ se tiene que T es una contracción

Ejercicio 3

a)

Signo de f



Signo de g.

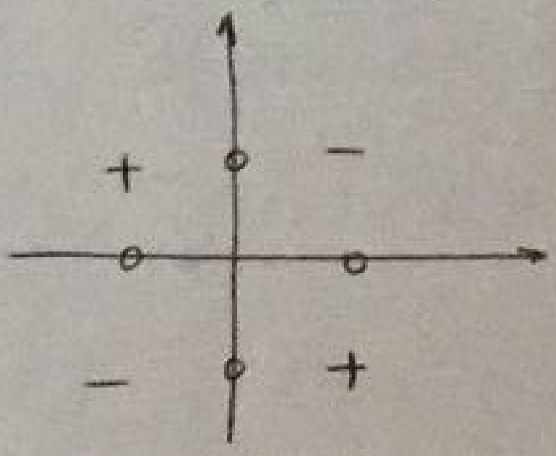
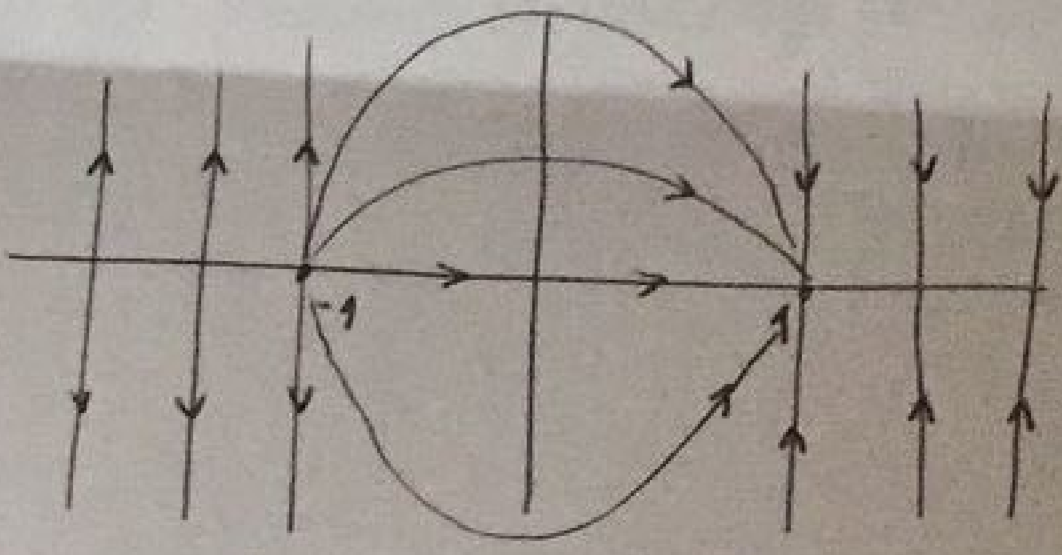


Diagrama de fase



b) Observando el diagrama de fase se tiene que si $\varphi(t)$ es la solución tal que $\varphi(0) = (0,1)$ entonces, $\varphi(t) \in [-1,1] \times [-1,1]$ $\forall\, t \in I_\varphi$

Tomando $K_k = [-1,1] \times [-1,1] \times [-k,k]$ para cada $k \in \mathbb{N}$ y aplicando el teorema de salida de compactos tenemos que existen $t_{1k}, t_{2k} \in I_\varphi$ tales que: $t_{1k} < 0 < t_{2k}$

$$(\varphi(t_{1k}), t_{1k}) \notin K_k$$

$$(\varphi(t_{2k}), t_{2k}) \notin K_k.$$

Como $\varphi(t_{1k}), \varphi(t_{2k}) \in [-1,1] \times [-1,1]$ se concluye que $t_{1k} \notin [-k,k]$ y $t_{2k} \notin [-k,k]$

Como $t_{1k} < 0 < t_{2k}$ entonces $t_{1k} < -k$, $t_{2k} > k$

Entonces $I_\varphi \supset [-k, k]$ para cada $k \in \mathbb{N}$,

luego $\underline{I_\varphi = \mathbb{R}}$.

c) Es análogo a la parte anterior observando que si $\varphi(t)$ es la solución tal que $\varphi(0) = (2,1)$ entonces $\varphi(t) \in \{2\} \times [0,2]$ $\forall t > 0, t \in I_\varphi$

Ahora definiendo $K_k = \{2\} \times [0,2] \times [0,k]$ $k \in \mathbb{N}$ y aplicando el teorema de salida de compactos.

se tiene que $I_\varphi \supset [0,k]$ $\forall k \in \mathbb{N} \rightarrow I_\varphi \supset \mathbb{R}^+$.

Ejercicio 4

para una versión $a_n = \frac{6}{n^3}(1-\cos n\pi)e^{-n^2 t}$

para la otra $a_n = \frac{4\pi}{n^3}(1-\cos n\pi)e^{-n^2 t}$