Universidad de la República **Ecuaciones diferenciales**
Facultad de Ingeniería - IMERL **Segundo Semestre 2017**

EXAMEN – Jueves 22 de febrero de 2018

Nro de Parcial	Cédula	Apellido y nombre

Escribir nombre y cédula en todas las hojas que se entreguen.

Ejercicio 1.

a) Hallar solución, diagrama de fase y estudiar estabilidad del origen en el siguiente sistema:

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} X$$

b) Estudiar la estabilidad del origen en la ecuación:

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 - 5x + 6y \\ \dot{y} = x^5 - 3x + 6y^8 + 4y \end{cases}$$

Ejercicio 2.

(1) Sea $T : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $T(x) = \frac{1}{2}x$. ¿ Tiene T un punto fijo ?

(2) Sea M un espacio métrico y $T : M \to M$ una contracción. Probar que para cualquier $x \in M$, la sucesión $(T^n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy.

(3) Sean $a, \epsilon > 0$. Se considera M el espacio de funciones continuas $\varphi : [-\epsilon, \epsilon] \to \mathbb{R}$ y $T : M \to M$, $T(\varphi)(t) = \int_0^t a\varphi(s)ds$. Hallar alguna relación entre ϵ y a para que T sea una contracción.

Ejercicio 3. Se considera la ecuación $(\dot{x}, \dot{y}) = (f(x, y), g(x, y))$, con $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ en las hipótesis del Teorema de Picard. Se sabe que:

- $f(x, y) = 0$ si $|x| \geq 1$, $f(x, y) > 0$ si $|x| < 1$
- $g(x, 0) = g(0, y) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$
- $g(x, y) > 0$ si, $xy < 0$; $g(x, y) < 0$ si $xy > 0$

Se pide:

(1) Dibujar un posible diagrama de fase de la ecuación.
(2) Demostrar que la solución por el punto $(0,1)$ tiene intervalo maximal $\mathbb{R}$.
(3) Demostrar que la solución por el punto $(2,1)$ tiene intervalo maximal no acotado al futuro.

Ejercicio 4. Se considera la ecuación en derivadas parciales:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \\ u(x,0) = \pi^2 x(\pi - x) \end{cases}$$

$u : [0,\pi] \times [0,+\infty) \to \mathbb{R}$

Indicar la opción correcta

Buscando soluciones de la forma

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(nx),$$

se obtiene:

(1) $a_n = \frac{6}{n^3}(1-\cos(n\pi))e^{-n^2 t}$
(2) $a_n = 6\pi(1-\cos(n\pi))(1-\sin(\frac{n\pi}{2}))e^{-n^2 t}$
(3) $a_n = 4\pi(1-\cos(n\pi))(1-\sin(\frac{n\pi}{2}))e^{-n^2 t}$
(4) $a_n = \frac{4\pi}{n^3}(1-\cos(n\pi))e^{-n^2 t}$