IMERL - FIng - UdelaR

Ecuaciones Diferenciales
Examen

13 de diciembre de 2018.

No. examen	Apellido y nombre	Firma	Cédula

Ejercicio 1

1. Consideremos las matrices
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\mu \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\mu \end{pmatrix},$$
donde μ es un número real positivo menor que 2.
Dibujar los diagramas de fase de las ecuaciones $\dot{X} = AX$ y $\dot{X} = BX$.

2. Consideremos la ecuación
$$\ddot{\theta} + \mu\dot{\theta} + \operatorname{sen}(\theta) = 0, \tag{1}$$
donde $\mu \in (0, 2)$, que modela el péndulo con rozamiento. Hallar sus puntos de equilibrio y estudiar la estabilidad de los mismos.

Ejercicio 2

Consideremos la ecuación
$$(E) \quad \left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x} & = & -y + x(1 - x^2 - y^2) \\ \dot{y} & = & x + y(1 - x^2 - y^2) \end{array} \right.$$

1. Haciendo el cambio a coordenadas polares $x = r\cos(\theta)$, $y = r\operatorname{sen}(\theta)$, hallar una ecuación equivalente a (E) para las variables (r, θ). El resultado es la ecuación
$$(E') \quad \left\{ \begin{array}{rcl} \dot{r} & = & r(1 - r^2) \\ \dot{\theta} & = & 1 \end{array} \right.$$

2. Probar que el único punto de equilibrio de (E) es $(0,0)$. (Sugerencia: usar la ecuación (E')).

3. Probar que la ecuación (E) tiene una solución periódica distinta de la estacionaria.

4. Esbozar el diagrama de fase de la ecuación (E) en el plano xy, explicando cómo lo hace.

Ejercicio 3

1. Sea la función $f(x) = x^2 - \frac{\pi^2}{3}$, $x \in [-\pi, \pi]$ y que es periódica de período 2π.

   Calcule los coeficientes de la serie de Fourier de f.

2. Definamos la función
$$g(x) = \int_0^x f(t)dt = \frac{x^3}{3} - \frac{\pi^2}{3}x \text{ para } x \in [-\pi, \pi]$$
   y periódica de período 2π. Para esta función calcule los coeficientes de su serie de Fourier.

3. ¿Qué puede decir de la convergencia de ambas series? ¿Es g derivable en $\mathbb{R}$?

4. Manteniendo las mismas funciones f y g, consideremos la ecuación de ondas
$$\begin{cases} u_{tt}(t,x) = u_{xx}(t,x) \\ u(0,x) = f(x) \\ u_t(0,x) = g(x) \end{cases}$$

5. Encuentre una candidata a solución en forma de serie de funciones.

6. Escríbala como superposición de ondas viajeras, es decir, de la forma $u(t,x) = F(x-t) + G(x+t)$. (Sugerencia: recordar que $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(b)$ y que $\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(b)$).

Elija uno y sólo uno de los siguientes ejercicios:

Ejercicio 4

Sean f y g dos funciones definidas de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $\int_{\mathbb{R}} |f(x)|dx < +\infty$ y $\int_{\mathbb{R}} |g(x)|dx < +\infty$. Definamos la convolución de f con g como la función

$$h(x) = f * g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)dy.$$

Si denotamos por $\hat{f}(\gamma)$ la transformada de Fourier de f demuestre que $\widehat{f * g}(\gamma) = \hat{f}(\gamma)\hat{g}(\gamma)$

Ejercicio 5

Sean A y B dos números no negativos. La desigualdad de Gronwall dice que si φ es una función continua no negativa definida en el intervalo $[0, T]$ y para todo $t \in [0, T]$ se satisface

$$0 \leq \varphi(t) \leq A + B \int_0^t \varphi(s)ds,$$

entonces $\varphi(t) \leq A + e^{Bt}$.
Sea $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ continua y lipschitziana en la segunda variable. Denotaremos por φ_0 y φ_1 las soluciones de la ecuación diferencial

$$x' = f(t, x(t))$$

con condiciones iniciales $\varphi_0(0) = x_0$ y $\varphi_1(0) = x_1$ respectivamente. Demostrar, usando la desigualdad de Gronwall, que para todo $T > 0$ y $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si $||x_0 - x_1|| < \delta$, entonces

$$\sup_{t \in [0,T]} ||\varphi_0(t) - \varphi_1(t)|| < \varepsilon.$$