Ejercicio 1

1. Sea $\psi = \varphi_1 - \varphi_2$, se tiene entonces que $\dot{\psi} = A\psi$. Por lo visto en el teórico se cumple que $\psi(t) = e^{At}\psi(0)$. Como $\psi(0) = X_1 - X_2$ entonces tenemos que $\varphi_1(t) - \varphi_2(t) = e^{tA}(X_1 - X_2)$

2. Tomando $\varphi_1 = \varphi$ y $\varphi_2 = \varphi_p$, aplicamos la parte anterior y obtenemos que $\varphi(t) - \varphi_p(t) = e^{tA}(X_1 - X_2)$. Por lo tanto $\varphi(t) = \varphi_p(t) + e^{tA}(X_1 - X_2)$.

3. Como $\varphi_p(t) = e^{\alpha t}u$ es solución entonces sustituyendo en la ecuación se cumple que

$$\alpha e^{\alpha t}u = Ae^{\alpha t}u + e^{\alpha t}b \text{ de donde deducimos que } \alpha u = Au + b.$$

Entonces $(A - \alpha Id)u = -b$, como α no es valor propio de A, se tiene que $A - \alpha Id$ es invertible y con esto se puede despejar u: $u = -(A - \alpha I)^{-1}b$. La unicidad se puede ver a partir de lo anterior o bien usando Picard, ya que como $\varphi_p(0) = u$ hay una única solución con esta condición inicial y es la anterior.

4. Podemos pensar el sistema como $\dot{X} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X + e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Con esto, usando la parte anterior, una solución particular nos queda $\varphi_p(t) = e^{2t}u$, con $u = -\left(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - 2I\right)^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Por lo tanto $\varphi_p(t) = e^{2t}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Como la matriz A tiene valores propios 1 y 3, haciendo cuentas, se llega a que

$$e^{tA} = P\begin{pmatrix} e^{3t} & 0 \\ 0 & e^{t} \end{pmatrix}P^{-1}, \text{ siendo } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto la solución general φ es

$$\varphi(t) = \begin{pmatrix} -e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix} + P\begin{pmatrix} e^{3t} & 0 \\ 0 & e^{t} \end{pmatrix}P^{-1}X_0$$

Ejercicio 2.

1. Aplicando el teorema de Hartman en el origen se obtiene la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Como $det(A - \lambda Id) = \lambda^2$, entonces cero es valor propio doble. Por lo tanto, no se puede decir nada acerca de la estabilidad del origen.

2. Nuevamente, usando el teorema de Hartman, obtenemos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1-k \end{pmatrix}.$$

Haciendo cuentas, llegamos a que $det(A - \lambda Id) = \lambda^2 + \lambda k + k$. Por lo que los valores propios son

$$\lambda_1 = \frac{-k + \sqrt{k^2 - 4k}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{-k - \sqrt{k^2 - 4k}}{2}$$

- Si $k < 0$ se cumple que λ_1 es positivo y por lo tanto el origen es inestable.
- Si $k > 0$ se tiene que la parte real de λ_1 y λ_2 son negativas y por lo tanto el origen es asintóticamente estable.

Ejercicio 3.

1. $$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)sen(\frac{n\pi x}{L}) = \frac{2}{L}\int_0^{\frac{L}{2}} xsen(\frac{n\pi x}{L}) + \frac{2}{L}\int_{\frac{L}{2}}^L (L-x)sen(\frac{n\pi x}{L})$$

   Haciendo cuentas obtenemos que

   $$b_n = \frac{4L}{(n\pi)^2}sen(\frac{n\pi}{2})$$

2. Buscando soluciones de la forma $X(x)T(t)$ obtenemos las ecuaciones:
   1) $X'' + \lambda X = 0$.
   2) $T'' + \lambda T = 0$.

   De la condición $u(0,t) = u(L,t) = 0$, obtenemos que $X(0) = X(L) = 0$ y por lo tanto la solución de la ecuación 1) es $X(x) = A_n sen(\frac{n\pi x}{L})$.

   De la condición $u(x,0) = 0$ obtenemos que $T(0) = 0$ y por lo tanto la solución de la ecuación 2) es $T(t) = B_n sen(\frac{n\pi t}{L})$.

   Ahora consideramos

   $$u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} C_n sen(\frac{n\pi t}{L})sen(\frac{n\pi x}{L}) \text{ donde } C_n = A_n B_n.$$

   Como $u_t(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} C_n \frac{n\pi}{L} cos(\frac{n\pi t}{L})sen(\frac{n\pi x}{L})$, entonces de la condición $u_t(x,0) = \begin{cases} x & si \quad 0 \leq x \leq \frac{L}{2} \\ L-x & si \quad \frac{L}{2} \leq x \leq L \end{cases}$ obtenemos que $C_n \frac{n\pi}{L}$ es el coeficiente de Fourier de la extensión impar de la función f que fue calculada en la parte a). Por lo tanto $C_n \frac{n\pi}{L} = b_n = \frac{4L}{(n\pi)^2} sen(\frac{n\pi}{2})$ y el candidato a solución es

   $$u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4L^2}{(n\pi)^3} sen(\frac{n\pi}{2})sen(\frac{n\pi t}{L})sen(\frac{n\pi x}{L}).$$