Ecuaciones Diferenciales **27 de julio de 2017.**

Examen

No. Examen	Apellido y nombre	Firma	Cédula

1. Sea la matrix

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 1 \\ 6 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcular e^{tA} y hallar la solución de la ecuación $\dot{X} = AX$ con $X(0) = (1, 1, 1)$.

2. Considerar el siguiente sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = y - \tan x \\ \dot{y} = -x + y + u(x, y) \end{array} \right\}$$

a) Para $u = 0$. Qué se puede decir, usando el Teorema de Hartman, sobre la estabilidad del sistema en el origen?

b) Para $u(x, y) = -2y$. Probar que el origen es asintóticamente estable.

c) Para $u(x, y) = -ky$ con $k \in \mathbb{Z}$. Determinar el conjunto de los $k \in \mathbb{Z}$ para los cuales el sistema es asintóticamente estable.

3. *a*) Enunciar y demostrar el Teorema de salida de compactos.

b) Sea el sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{X} = AX \\ X(0) = X_0 \end{array} \right\} \quad \text{con} \quad A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}).$$

Probar que el intervalo maximal de cualquier solución es $\mathbb{R}$.

4. *a*) Buscando soluciones de la forma $X(x).T(t)$ encontrar un candidato a solución a la ecuación

- $u_{tt} - u_{xx} = 0 \quad$ para todo $(x, t) \in (0, L) \times (0, +\infty)$,
- $u(0, t) = u(L, t) = 0 \quad$ para todo $t \in (0, +\infty)$,
- $u(x, 0) = 0 \quad$ para todo $x \in [0, L]$,
- $u_x(x, 0) = \left\{ \begin{array}{ccc} x & si & 0 \leq x \leq \frac{L}{2} \\ L - x & si & \frac{L}{2} \leq x \leq L \end{array} \right[\Big].$
- u de clase C^2 en $(0, \pi) \times (0, +\infty)$ y continua en $[0, \pi] \times [0, +\infty)$.

5. Se considera el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \dot{x} = y^2 - x^2 \\ \dot{y} = 2y^2x - 2x^3 \end{cases}$$

a) Hallar una preintegral de la forma $H(x, y) = y - x^n$.

b) Hacer el diagrama de fase.

c) Estudiar la estabilidad de los puntos críticos.

6. Sean $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$ y la ecuación

$$(I) \quad x' = Ax + e^{\alpha t}b$$

a) Probar que si φ_1 y φ_2 son soluciones de la ecuación con $\varphi_1(0) = X_1$ y $\varphi_2(0) = X_2$ entonces $\varphi_1(t) - \varphi_2(t) = e^{tA}(X_1 - X_2)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

b) Sea φ_p una solución particular de (I). Probar que toda solución φ de (I) es de la forma $\varphi(t) = \varphi_p(t) + e^{tA}(X_0)$ para algún $X_0 \in \mathbb{R}^n$.

c) Probar que si α no es valor propio de A, entonces la ecuación $x' = Ax + e^{\alpha t}b$ tiene una única solución de la forma $\varphi_p(t) = e^{\alpha t}u$ con $u \in \mathbb{R}^n$. Calcular u en función de A, b y α.

d) Resolver el sistema

$$\begin{cases} x' = 2x + y + e^{2t} \\ y' = x + 2y - e^{2t} \end{cases}$$