Ecuaciones Diferenciales **23 de Febrero de 2017.**

Examen

No. Examen	Apellido y nombre	Firma	Cédula

Ejercicio 1 (35pts)

1. (20pts) Buscar un candidato a solución de la forma $X(x)T(t)$ al siguiente problema:

$$\begin{cases} tU_t + U_{xx} = 0 & (t,x) \in (0,1) \times (0,\pi) \\ U(t,0) = U(t,\pi) = 0 & t \in [0,1] \\ U(1,x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{sen(nx)}{n^2} & x \in \ [0,\pi] \\ U \text{ continua en} & [0,1] \times [0,\pi] \end{cases}$$

2. (15pts) Escribiendo el candidato hallado en la parte anterior de la forma $U(t,x) = \sum u_n(t,x)$, probar que U es continuo en $[0,1] \times [0,\pi]$ y que

$$\frac{\partial U}{\partial t}(t,x) = \sum \frac{\partial u_n}{\partial t}(t,x) \quad \text{en } (0,1) \times (0,\pi)$$

Ejercicio 2 (25 pts)

1. (5pts) Enunciar los teoremas de Lyapunov 1 y 2.
2. (20pts) Asumiendo el teorema de Lyapunov 1, probar el teorema de Lyapunov 2.

Ejercicio 3 (40pts)

Sea la ecuación diferencial $\dot{x} = (t + e^{-t} - x)e^t$.

1. (5pts)
   - Verificar que la función $x(t) = t$ es solución a la ecuación diferencial.
   - Sea Γ los puntos tales que $\dot{x} = 0$. Graficar Γ.
2. (10pts) Sea φ una solución tal que $\varphi(t_0) \in \Gamma$, demostrar que si $t_0 < 0$, φ tiene un máximo en t_0 y si $t_0 > 0$, φ tiene un mínimo en t_0.
3. (10pts) Sea $\mathcal{S} = \{(t,x) \in \mathbb{R}^2 : t + e^{-t} - x < 0\}$. Probar que si una solución φ ingresa a $\mathcal{S}$, tiene que necesariamente salir de $\mathcal{S}$ y no vuelve a entrar.
4. (5pts) Hacer un croquis de todas las soluciones posibles.
5. (10pts) Sea φ una solución de la ecuación. Demostrar que el intervalo maximal de φ no está acotado superiormente.

Esquema de solución:

Ejercicio 1: 1. Buscamos soluciones de la forma $U(t,x) = T(t) \cdot X(x)$, por tanto la misma debe verificar entonces $tT'(t)X(x) + T(t)X''(x) = 0$. A partir de esto obtenemos el sistema $\begin{cases} \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda \\ \frac{-tT'(t)}{T(t)} = \lambda \end{cases}$ Resolviendo el sistema $X''(x) - \lambda X(x) = 0$ considerando las condiciones $U(t,0) = U(t,\pi) = 0$ obtenemos $X(x) = A_n \sin(nx)$, con $\lambda = -n^2$.
Sustituyendo el valor de λ obtenido anteriormente tenemos $-tT'(t) = -n^2 T(t) \Leftrightarrow \frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{n^2}{t}$.
Resolviendo esta útlima ecuación diferencial se tiene $T(t) = t^{n^2}$.
Entonces un candidato a solución es de la forma $\sum A_n t^{n^2} \sin(nx)$. Ahora, como $U(1,x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2}$ concluímos que un candidato a solución es de la forma

$$U(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2} t^{n^2}$$

2. Continuidad de U en $[0,1] \times [0,\pi]$: Consideramos el término general de la serie, $u_n(t,x)$ y tratemos de acotarlo por el término general de una serie convergente.

$$|u_n(t,x)| = \left| \frac{\sin(nx)}{n^2} t^{n^2} \right| \overset{*}{\leq} \frac{1}{n^2}$$

En $*$ usamos que $|\sin(nx)| \leq 1$ y que $t^{n^2} \leq 1$ si $t \in [0,1]$.
Por tanto aplicando el criterio de mayorante de Weierstraß la sucesión de reducidas n-ésimas son continuas y convergen uniformemente a $U(t,x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2} t^{n^2}$ continua.

Intercambiar la serie con la derivada:
$\frac{\partial u_n}{\partial t}(t,x) = \sin(nx) t^{n^2-1}$. Sea $(t_0, x_0) \in (0,1) \times (0,\pi)$, observar que no se puede acotar el término general por un término de una serie convergente globalmente en $(0,1) \times (0,\pi)$. Por tanto, sea $\delta > 0$ tal que $0 < t_0 < \delta < 1$ y consideramos $A = (0,\delta) \times (0,\pi) \subset (0,1) \times (0,\pi)$. Entonces

$$\left| \frac{\partial u_n}{\partial t}(t,x) \right| = \left| \sin(nx) t^{n^2-1} \right| \leq \delta^{n^2-1}$$

Como $\delta < 1$, se tiene que δ^{n^2-1} es el término general de una serie convergente. Con esto, aplicando los teoremas vistos en el curso se puede intercambiar la serie con la derivada.

Ejercicio 3:

Parte 1) Verificar que $x(t) = t$ es solución es inmediato.
$\dot{x} = 0$ si y solo si $t + e^{-t} - x = 0$. Por lo tanto $\Gamma = \{(t,x) : \ x = t + e^{-t}\}$, por lo que gráfica de Γ es como en la figura 1 (a)

Parte 2) Sea φ una solución tal que $\varphi(t_0) \in \Gamma$. Como φ es solución entonces

$$\dot{\varphi}(t) = (t + e^{-t} - \varphi(t))e^t \tag{1}$$

derivando esta última igualdad llegamos a que

$$\ddot{\varphi}(t) = (1 - e^{-t} - \dot{\varphi}(t))e^t + (t + e^{-t} - \varphi(t))e^t \tag{2}$$

Como $\varphi(t_0) \in \Gamma$ entonces $\dot{\varphi}(t_0) = 0$ y por lo tanto de la ecuación (1) deducimos que

$$t_0 + e^{-t_0} - \varphi(t_0) = 0$$

Entonces tomando $t = t_0$ en la ecuación (2), la última igualdad queda

$$\ddot{\varphi}(t_0) = (1 - e^{-t_0})e^{t_0}.$$

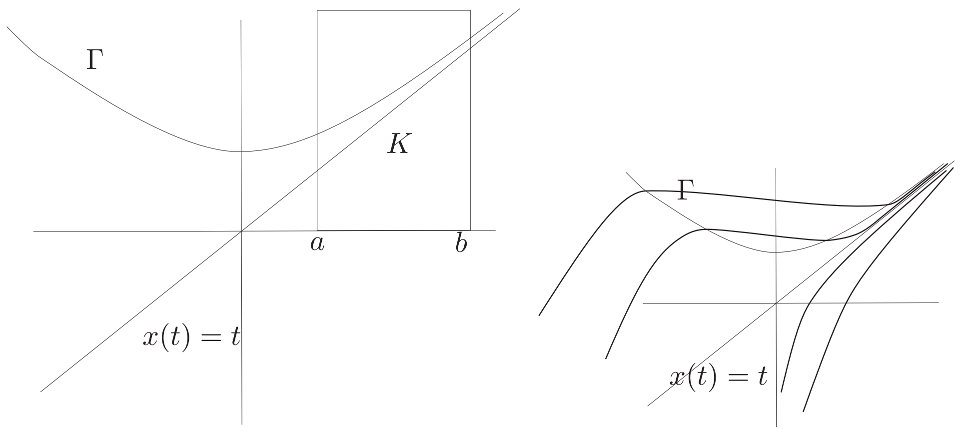
Lo que implica que si $t_0 > 0$ entonces $\ddot{\varphi}(t_0) > 0$ y por tanto φ tiene un mínimo en t_0. Y si $t_0 < 0$ entonces $\ddot{\varphi}(t_0) < 0$ y por tanto φ tiene un máximo en t_0.

Parte 3) Por la parte 1), sabemos que si una solución φ ingresó a $\mathcal{S}$, para salir lo debe hacer en un tiempo $t_0 > 0$. Supongamos que para un φ vuelve a entrar a $\mathcal{S}$. Esto significa que existe $t_1 > t_0$ tal que si $t_0 < t < t_1$ se tiene que $\varphi(t) \notin \mathcal{S}$ para y $\varphi(t_1) \in \Gamma$. Nuevamente por la parte 1), φ tiene que tener un mínimo en t_1; esto es absurdo ya que para tiempos t cercanos a t_1 por izquierda, φ es creciente.
Parte 4) ver figura 1 (b).

Parte 5) La solución $x(t) = t$ tiene como intervalo maximal $\mathbb{R}$. Por el teorema de Picard, cualquier otra solución está por debajo o por arriba de la solución $x(t) = t$.
Sea φ una solución que está por debajo de la solución $x(t) = t$. Supongamos que su intervalo maximal es (a, b) con $b \neq +\infty$. Considerando el compacto de la figura 1 (a) y aplicando el teorema de salida de compactos llegamos a una contradicción. Por lo tanto $b = +\infty$.
Sea φ una solución que está por arriba de la solución $x(t) = t$. Por las parte anteriores, todo solución que ingresa a $\mathcal{S}$ tiene que salir y no vuelve a entrar. Por lo tanto toda solución que está por arriba de $x(t) = t$ no la puede cortar y a partir de un tiempo en adelante no puede estar en la región $\mathcal{S}$.

Supongamos que su intervalo maximal es (a, b) con $b \neq +\infty$. Considerando el compacto de la figura 1(a) y aplicando el teorema de salida de compactos llegamos a una contradicción. Por lo tanto $b = +\infty$.

Figura 1:



(a) (b)