Solución examen de diciembre

Ejercicio 1.

a) Los valores propios de la primer matriz son 3 y 1. La base del subespacio propio asociado a 3 es $\{(1,1)\}$, y la del subespacio propio asociado a 1 es $\{(2,1)\}$. Por lo tanto la matriz de cambio de base es $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, y $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Por lo tanto la solución general de la primer ecuación es $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{3t} & 0 \\ 0 & e^{t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$.

La solución general de la segunda ecuación es $(x_0, -x_0 t + y_0)$ como surge por simple inspección de la matriz de la ecuación.

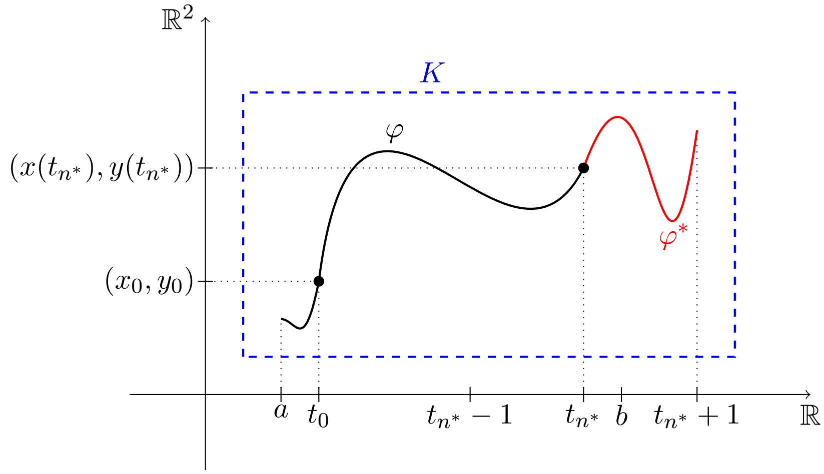
Se deduce para ambos sistemas que el origen es un punto de equilibrio inestable.

b) Aplicando el teorema de Hartman, sabemos que el sistema es topológicamente conjugado a su parte lineal. La parte lineal correspondiente a las dos primeras ecuaciones (que están desacopladas de la tercera) coincide con la primera matriz de la parte [a)]. Esto alcanza para deducir la inestabilidad en el origen. Para el diagrama de fase, simplemente observamos que la tercera ecuación proporciona un subespacio invariante contractivo.

Ejercicio 2.

La idea de este ejercicio era evaluar la comprensión de la prueba del teorema de escape de compactos. Si bien las hipótesis no son las mismas que en el enunciado de dicho teorema, se esperaba que se adaptara la prueba de ese teorema a estas hipótesis en particular. Dicho de otra manera, el objetivo del ejercicio era evaluar si la prueba de escape de compactos fue comprendida o memorizada.

Sea $\varphi(t) = (x(t), y(t))$ la solución maximal con condición inicial (t_0, x_0, y_0) e I el intervalo maximal. Estudiemos primero el caso que el intervalo maximal I es no acotado, por ejemplo $I = (a, +\infty)$ (el caso $(-\infty, b)$ o $\mathbb{R}$ es análogo). Como K es un compacto de $\mathbb{R}^n$, es acotado, por lo que necesariamente debe existir un $t > t_0$ tal que $(\{t\} \times \mathbb{R}^2) \cap K = \varnothing$. Luego $(t, x(t), y(t)) \notin K$.
Resta entonces estudiar el caso en que el intervalo maximal sea finito, es decir, $I = (a, b)$. Supongamos por absurdo que para un compacto $K \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ se cumple que $(t, x(t), y(t)) \in K$ para todo $t \in I$. Tomemos una sucesión de tiempos en I tal que $t_n \to b$. Esta determina una sucesión $\{(t_n, x(t_n), y(t_n))\} \subset K$. Como K es compacto, esta sucesión acumula en K.
Tomemos un n^* suficientemente grande, de manera tal que $b - t_{n^*} < 1$ y llamemos φ^* a la solución maximal que verifica que $\varphi^*(t_{n^*}) = (x(t_{n^*}), y(t_{n^*}))$ (es decir, φ^* es la solución con condición inicial $(t_{n^*}, x(t_{n^*}), y(t_{n^*})))$. Ahora, φ también es solución al mismo problema, por lo que la primera hipótesis nos dice que φ y φ^* deben coincidir en un entorno de t_{n^*}. Además, la segunda hipótesis nos asegura que el intervalo maximal de φ^* contiene a $(t_{n^*} - 1, t_{n^*} + 1)$, y este intervalo contiene a b (ver Figura a continuación).



Por lo tanto, podemos definir una nueva función ψ en $(a, t_{n^*} + 1)$ como sigue:

$$\psi(t) = \begin{cases} \varphi(t) & \text{si } t \in (a, b) \\ \varphi^*(t) & \text{si } t \in (t_{n^*} - 1, t_{n^*} + 1) \end{cases}$$

Así, ψ es una solución a la ecuación diferencial (porque φ y φ^* lo son) que cumple $\psi(t_0) = (x_0, y_0)$ y está definida en un intervalo mayor al maximal, lo que es una contradicción, concluyendo la prueba.

Ejercicio 3.

(1) Ver figura (vale también la solución con el sentido opuesto para el flujo).

(2) Dado un intervalo compacto arbitrario $[a, b] \subset \mathbb{R}$ tenemos que el conjunto $K = [a, b] \times [-1, 1] \times [-2, 0]$ es un compacto del cual la solución maximal debe salir. Como no es posible que escape por las variables espaciales (ya que se está en las hipótesis de Picard y la curva que contiene a la órbita pasa por dos puntos de equilibrio), se deduce que el intervalo maximal I debe contener estrictamente al $[a, b]$ y por lo tanto $I = \mathbb{R}$.

(3) Si $\varphi : (a, b) \to \mathbb{R}^2 / \varphi(t) = (x(t), y(t))$ (o simplemente $\varphi(t) = (x, y)$) es la solución maximal por $(0, 3)$, debido a la preintegral conocida podemos escribir $y = x^2 + 3$ por lo que $|\varphi(t)| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2x^2 + 6x + 9}$. Basta probar que $\lim_{t \to b} x(t) = +\infty$ para obtener el límite deseado.

Observamos que como la función coordenada $x(t)$ es monótona al crecer t (observar figura anterior), entonces solamente se tienen dos posibilidades: o bien $\lim_{t \to b} |x(t)| = +\infty$ o bien $\lim_{t \to b} |x(t)| = c$ con $c \in \mathbb{R}$ (por simplicidad, supondremos que el sentido del flujo es como en el diagrama de fase representado por lo que podemos trabajar sin los valores absolutos).

Supongamos entonces que $\lim_{t \to b} x(t) = c$ y consideremos la solución que en tiempo $t = b$ pasa por $(c, c^2 + 3)$. Esta solución está definida en un intervalo de tiempo $(b - \delta, b + \delta)$ con $\delta > 0$ y coincide con la anterior en el intervalo $(b - \delta, b)$ pues $(c, c^2 + 3)$ no es un punto de equilibrio (por hipótesis). Por estar en las hipótesis de Picard podemos asegurar que ambas soluciones coinciden por lo que la solución con condición inicial $(0, 3)$ está definida en $(a, b + \delta)$ pero esto es absurdo pues (a, b) es su intervalo maximal. Esto significa que $\lim_{t \to b} x(t) = +\infty$ por lo que $\lim_{t \to b} |\varphi(t)| = +\infty$ como queríamos probar.

Ejercicio 4. Usando el *método de separción de variables*, buscamos soluciones estacionarias de la forma

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

Concluimos que

$$\frac{X''}{X} = \frac{T'}{T} = c$$

donde c es una constante.
Se tiene que $X(0) = X(L) = 0$ y por lo tanto si biuscamos soluciones estacionarias no triviales, $c > 0$ y

$$X(x) = \alpha \cos \sqrt{c}x + \beta \sin \sqrt{c}x.$$

Usando de nuevo las condiciones iniciales

$$\alpha = 0 \quad y \quad \sqrt{c} = \frac{n\pi}{L}$$

Por lo que

$$X_n(x) = \beta_n \sin \frac{n\pi}{L}x \quad y \quad T_n(t) = e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t}.$$

Luego las soluciones estacionarias son de la forma

$$u_n(x,t) = \beta_n \sin \frac{n\pi}{L}xe^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t}$$

Observar que para $n = 2$

$$u_2(x,t) = \beta_2 \sin(\frac{2\pi}{2}x)e^{-\frac{4\pi^2}{L^2}t},$$

y que entonces

$$u_2(x,0) = \beta_2 \sin(\frac{2\pi}{2}x) = -\beta_2 \sin(-\frac{2\pi}{2}x).$$

Por lo tanto

$$u_2(x,t) = -\sin(\frac{2\pi}{2}x)e^{-\frac{4\pi^2}{L^2}t},$$

es solución de la EDP pedida.

Ejercicio 5.

(1) La serie de Fourier $S(f)$ de f de

es igual a

$$S(f)(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\pi x + b_n \sin(n\pi x)$$

donde los coeficientes se calculan :

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{pi} tdt = \frac{\pi}{2}.$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos ntdt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} t\cos ntdt = \frac{(-1)^{n+1}+1}{n^2\pi}.$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} t\sin ntdt = \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}.$$

Por lo que:

$$S(f)(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}+1}{n^2\pi}\cos(nx) + \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}\sin(nx)$$

(2) Para calcular lo pedido evaluamos $S(f)$ en $x=0$.

$$S(f)(0) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}+1}{n^2\pi}\cos(0) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n-1)^2\pi}.$$

Además sabemos que como $x=0$ es un punto de discontunuidad de la extensión 2π períodica de la función f entonces:

$$S(f)(0) = \frac{f^+(0)+f^-(0)}{2} = \frac{pi}{2}.$$

Por lo tanto:

$$\frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n-1)^2\pi} = \frac{\pi}{2} \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$