Universidad de la República | **Ecuaciones diferenciales**
Facultad de Ingeniería - IMERL | **Primer Semestre 2017**

EXAMEN – Jueves 14 de diciembre de 2017

Nro de Parcial	Cédula	Apellido y nombre

Escribir nombre y cédula en todas las hojas que se entreguen.

Ejercicio 1.

a) Hallar solución, diagrama de fase y estudiar estabilidad del origen en los siguientes sistemas:

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} X$$

$$\dot{Y} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} Y$$

b) Estudiar la estabilidad del origen en la ecuación:

$$\begin{cases} \dot{x} = x(x-1) + 4y \\ \dot{y} = y(x+5) + x(x^2-2) \\ \dot{z} = z(-3+z) \end{cases}$$

Ejercicio 2. Se considera la ecuación $(\dot{x}, \dot{y}) = f(x, y)$ con $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ no necesariamente en las hipótesis de Picard. Se sabe que para cada condición inicial (t_0, x_0, y_0):

- Existe φ solución maximal única de la ecuación con condición inicial (t_0, x_0, y_0) definida en un intervalo I. Es decir: Si ψ es otra solución de la ecuación con condición inicial (t_0, x_0, y_0) definida en un intervalo J, entonces $J \subset I$, y $\varphi|_{I\cap J} = \psi|_{I\cap J}$.
- El intervalo maximal I contiene al intervalo $(t_0 - 1, t_0 + 1)$.

Demostrar que para todo $K \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ compacto, y toda solución maximal φ, existe t tal que $(t, \varphi(t)) \notin K$.

Ejercicio 3. Se considera la ecuación $(\dot{x}, \dot{y}) = f(x, y)$ con $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ en las hipótesis de Picard. Se sabe que:

- El conjunto de puntos de equilibrio es: $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 = x^2\}$
- $V(x, y) = x^2 - y$ es una preintegral de la ecuación.

Se pide:

(1) Dibujar un posible diagrama de fase de la ecuación.
(2) Demostrar que la solución por el punto $(0,-1)$ tiene intervalo maximal $\mathbb{R}$.
(3) Sea $\varphi : (a,b) \to \mathbb{R}^2$ la solución maximal por el punto $(0,3)$. Probar que

$$\lim_{t\to b} |\varphi(t)| = +\infty$$

Ejercicio 4. Se considera la ecuación en derivadas parciales:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 \\ u(x,0) = \sin(\frac{-2\pi}{L}x) \end{cases}$$

$u : [0,L] \times [0,+\infty) \to \mathbb{R}$

La solución de la ecuación es:

$u(x,t) =$

Ejercicio 4.

(1) Hallar la serie de Fourier de la función periódica definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad -\pi \leqslant x < 0 \\ x & \text{si} \quad 0 \leqslant x < \pi \end{cases}$$

(2) Sustituyendo x por π concluir que

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$