Ecuaciones Diferenciales
examen de febrero

26 de febrero de 2016.

Ejercicio 1, parte a).

El coeficiente de Fourier de la extensión impar de período $2L$ es

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)sen(\frac{n\pi x}{L})dx.$$

Como $L = 1$ y f es impar entonces queda

$$b_n = \int_0^1 f(x)sen(n\pi x)dx = \int_0^1 (x^2 - x)sen(n\pi x)dx.$$

Haciendo cuentas queda

$$b_n = \frac{4}{(n\pi)^3}(cos(n\pi) - 1) = \frac{4}{(n\pi)^3}((-1)^n - 1).$$

Ejercicio 1, parte b). La solución $v(x,t)$ de la ecuación es de la forma $v(x,t) = u(x,t) + u_p(x,t)$, donde $u_p(x,t) = x$ y $u(x,t)$ es la solución de la ecuación

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x}(x,t) \quad (x,t) \in (0,1) \times (0,+\infty); \\ u(x,0) = x^2, \quad x \in [0,1]; \\ u(0,t) = 0, \ u(1,t) = 0, \quad t \geq 0. \end{cases}$$

Por lo visto en el teórico(buscando soluciones de la forma $X(x).T(t)$) la solución $u(x,t)$ es

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n sen(n\pi x)e^{-(n\pi)^2 t},$$

donde b_n es el hallado en la parte a).

Ejercicio 1, parte c). Ver teórico.

Ejercicio 2, parte a).

Si x es solución de la ecuación $x' = f(t,x)$ con $x(t_0) = x_0$ entonces se cumple que

$$x(t) - x(t_0) = \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds.$$

Supongamos que el intervalo maximal de x es (a,b). Vamos a probar que $b = +\infty$. Entonces

$$||x(t)|| \leq ||x(t_0)|| + ||\int_{t_0}^{t} f(s,x(s))ds|| \leq ||x(t_0)|| + \int_{t_0}^{t} ||f(s,x(s))||ds \leq$$

$$\leq ||x(t_0)|| + \int_{t_0}^{t} v(s)||x(s)||ds$$

Como v es continua en todo $\mathbb{R}$ se tiene que existe $M > 0$ tal que $v(s) \leq M$ para todo $s \in [a, b]$. Entonces se tiene que

$$||x(t)|| \leq ||x(t_0)|| + \int_{t_0}^{t} M||x(s)||ds.$$

Luego por el lema de Gronwall se tiene que

$$||x(t)|| \leq ||x(t_0)||.e^{\int_{t_0}^{t} Mds.} \leq ||x(t_0)||.e^{(b-t_0)M}.$$

Tomando $K = \{(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : \ ||x|| \leq ||x(t_0)||.e^{(b-t_0)M}, \ a \leq t \leq b\}$ se tiene que $(t, x(t)) \in K$ para todo $t \in (a, b)$, lo que contradice el teorema de salida de compactos. Entonces $b = +\infty$. Análogamente se prueba que $a = -\infty$.

Ejercicio 2, parte b) , 1).

Como $x = \theta$ y $y = \dot{\theta}$ entonces $y = \dot{x}$. Por otro lado, $\dot{y} = \ddot{\theta} = -\frac{g}{R} sen(\theta) = -\frac{g}{R} sen(x)$. Entonces queda la ecuación

$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= -\tfrac{g}{R} sen(x) \end{aligned}$$

Ejercicio 2, parte b), 2).

Como la función $f(x, y) = (y, -\frac{g}{R} sen(x))$ es de clase C^1, entonces está en las hipótesis del Teorema de Picard.

Ejercicio 2, parte b), 3).

$$\dot{H} = \dot{y}y + sen(x)\dot{x} = -sen(x)y + sen(x)y = 0.$$

Ejercicio 2, parte b), 4). Como H es una preintegral entonces para hacer un diagrama de fase hay que hacer un estudio de las curvas de nivel de H. Las curvas de nivel de H son $\{(x, y) : \ \frac{y^2}{2} - cos(x) = k\}$. Haciendo un dibujo para los diferentes valores de K, las curvas de nivel quedan como en la figura 1.

Ejercicio 2, parte b), 5).

La función $f(x, y) = (y, -sen(x))$ claramente cumple con las hipt́esis de la parte a), por lo tanto las soluciones están defiinidas para todo real.

Figura 1: