Ecuaciones Diferenciales
Examen febrero

26 de febrero de 2016.

No. Examen	Apellido y nombre	Firma	Cédula

1. (50 puntos)
   a) Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2 - x$. Hallar los coeficientes de Fourier de la extensión impar, 2-periódica ($f(x+2) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$) de f. (15 puntos)
   b) Hallar un candidato a solución de la siguiente ecuación:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x}(x,t) \quad (x,t) \in (0,1) \times (0,+\infty); \\ u(x,0) = x^2, \quad x \in [0,1]; \\ u(0,t) = 0, \; u(1,t) = 1, \quad t \geq 0. \end{cases} \qquad (15\ puntos)$$

   c) Probar que el candidato a solución hallado en a) verifica todas las condiciones enunciadas. (20 puntos)
   Si se usa un resultado se debe enunciar. Solo enunciar, NO demostrar.

2. (50 puntos)
   a) Supongamos que $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es una función de clase C^1 y que existe una función $v : \mathbb{R} \to [0,+\infty)$ continua tal que
   $$\|f(t,x)\| \leqslant v(t)\|x\|$$
   para todo $(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Demostrar que las soluciones maximales de la ecuación $x' = f(t,x)$ están definidas en todo $\mathbb{R}$.(10 puntos)
   b) El problema del péndulo sin rozamiento (movimiento bidimensional) se rige por la ecuación diferencial:
   $$-g\sin(\theta) = R\,\ddot{\theta}$$
   donde θ es el ángulo que forma el péndulo con la vertical, g la aceleración gravitatoria y R el radio.
      1) Mediante el cambio de variable $x = \theta$ e $y = \dot{\theta}$ transformar la ecuación diferencial de segundo orden del problema anterior en una de primer orden con dos variables. (5 puntos)
      2) Probar que la ecuación diferencial anterior se encuentra en las hipótesis del Teorema Picard. (5 puntos)
      3) Para simplificar la ecuación, consideraremos $g/R = 1$. Verificar que $H(x,y) = \frac{y^2}{2} - \cos(x)$ es una preintegral. (5 puntos)
      4) Realizar el diagrama de fase y estudiar la estabilidad de los puntos de equilibrio. (15 puntos)
      5) Estudie el intervalo maximal de las soluciones. (10 puntos)

Para aprobar el examen el puntaje mínimo es 60 puntos o tener un problema completo bien.

$\int xsen(ax)dx = \frac{sen(ax)}{a^2} - \frac{xcos(ax)}{a}$

$\int x^2 sen(ax)dx = \frac{2xsen(ax)}{a^2} - (\frac{x^2}{a} - \frac{2}{a^3})cos(ax)$