Ejercicio 1

1). Busco soluciones de la forma $u(x,y) = X(x)\cdot Y(y)$. Como $u_{xx} - \frac{1}{y}u_y = 0$, la solución debe verificar que

$$X''(x)Y(y) - \frac{1}{y}X(x)\cdot Y'(y) = 0 \Leftrightarrow \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{y}\frac{Y'(y)}{Y(y)} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda \\ \frac{1}{y}\frac{Y'(y)}{Y(y)} = \lambda \end{cases}$$

con λ constante.

Considerando la ecuación $X''(x) = \lambda X(x)$, discutimos la solución según el signo de λ.

1. Si $\lambda = 0$: $U''(x) = 0$, entonces $U(x) = ax + b$.
   Como $u(0,y) = u(\pi,y) = 0$ entonces $X''(0)Y(y) = 0 = X''(\pi)Y(y)$ para todo $y \in [0,+\infty)$, por lo tanto $X(0) = b = 0$, y $X(\pi) = a\pi = 0$ y entonces $a = 0$. Concluimos que $u(x,y) = 0$.

2. Supongamos $\lambda > 0$: en este caso tenemos que $X(x) = A\cosh(\sqrt{\lambda}x) + B\sinh(\sqrt{\lambda}x)$. Si evaluamos en 0 y π; $u(0,y) = A.Y(y) = 0$, con lo que $A = 0$; $u(\pi,y) = B\sinh(\sqrt{\lambda}\pi)Y(y) = 0$ y entonces $B = 0$. Lo que implica que $u(x,y)$ es la solución trivial.

3. Finalmente veamos el caso $\lambda < 0$: en este caso $X(x) = A\cos(\sqrt{\lambda}x) + B\sin(\sqrt{\lambda}x)$, evaluando $u(0,y) = AY(y) = 0$ se concluye que $A = 0$, $u(\pi,y) = (B\sin(\sqrt{-\lambda}\pi))Y(y) = 0$, entonces $\lambda = -n^2$, para todo $n \in \mathbb{Z}$.
   De esta forma llegamos a que $X(x) = B_n \sin(nx)$.
   Por otro lado, resolviendo la ecuación $Y'(y) + n^2 yY(y) = 0$, obtenemos que $Y(y) = C_n e^{-n^2\frac{y^2}{2}}$.

   Podemos de esta manera considerar $u_n(x,y) = A_n \sin(nx)e^{-n^2\frac{y^2}{2}}$, $n \in \mathbb{N}$(donde $A_n = B_nC_n$). Entonces, sumando todas las soluciones, tomamos un candidato a solución de la forma $u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(nx)e^{-n^2\frac{y^2}{2}}$.
   Con la condición $u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^3}\sin(nx)$, llegamos a que $A_n = \frac{2}{n^3}$.
   Entonces nuestro candidato a solución es

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^3}\sin(nx)e^{-n^2\frac{y^2}{2}}.$$

2). Sea $(x_0,y_0) \in (0,\pi)\times(0,\infty)$, tomemos δ y β, $\delta < \beta$, tal que $0 < \delta < y_0^2/2$, $\beta > y_0$ y el abierto $A = (0,\pi)\times(\delta,\beta)$. Sea $(x,y) \in A$. Utilicemos el criterio de la mayorante de Weierstrass aplicado a $\sum \frac{\partial u_n}{\partial y}$:

$$\left|\frac{\partial u_n}{\partial y}\right| = \left|\frac{-2n^2 y}{n^3}e^{-\frac{y^2}{2}n^2}\sin(nx)\right| \leq \frac{2\beta}{n}e^{-n^2\delta}$$

y esto último es el término general de una serie convergente. Con esto, aplicando el criterio de la mayorante de Weierstrass, la reducida n-ésima $\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u_i}{\partial y}$ converge uniformemente en

A. Por el siguiente Teorema:
Si $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones reales, derivables en (a,b) para las que se cumple:

- Existe $x_0 \in (a,b)$ tal que $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ converge.
- Existe g definida en (a,b) tal que $\sum_{n=1}^{\infty} f_n' \rightrightarrows g$, en (a,b) entonces existe f en (a,b) derivable tal que $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \rightrightarrows f$. Además, $\forall\ x,\ f'(x) = g(x)$ y por lo tanto $\frac{\partial}{\partial x} \sum f_n = \sum \frac{\partial f_n}{\partial x}$

  concluimos que $\frac{\partial}{\partial y} \sum u_n = \sum \frac{\partial}{\partial y} u_n$.

  3). Consideramos $p(x,y) = e^x f(y)$, entonces si verifica la ecuación, se tiene que

$$e^x f(y) - e^x \frac{1}{y} f'(y) = e^x(2+y^2) \Leftrightarrow f(y) - \frac{1}{y} f'(y) = 2 + y^2 \Leftrightarrow f'(y) - y f(y) = -2 - y^3$$

Ahora considerando $f(y) = ay^2 + by + c$, sustituyendo en la última ecuación se tiene que $2ay + b - ay^3 - by^2 - cy = -2y - y^3$ y esto implica $a = 1, b = 0, c = 4$.
Por tanto $p(x,y) = e^x(y^2+4)$.

4) Si consideramos u_1 solución de (I) y p la solución solución hallada en 3) entonces $u = u_1 + p$ es el candidato a solución de (II).

Ejercicio 2.

Parte 1) a). Sea x solución. Entonces se cumple que $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$, integrando se llega a que $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s)) ds$. Entonces

$$||x(t)|| \leq ||x_0|| + || \int_{t_0}^{t} f(s,x(s)) ds || \leq ||x_0|| + \int_{t_0}^{t} ||f(s,x(s))|| ds \overset{\|f(t,x)\| \leqslant v(t)\|x\|}{\leq} ||x_0|| + \int_{t_0}^{t} v(s) ||x(s)|| ds$$

Por lo tanto llegamos a que

$$||x(t)|| \leq ||x_0|| + \int_{t_0}^{t} v(s) ||x(s)|| ds$$

Aplicando el lema de Gronwall se tiene que

$$||x(t)|| \leq ||x_0|| e^{\int_{t_0}^{t} v(s) ds}$$

Supongamos ahora que el intervalo maximal de x es (a,b). Como v es continua en $\mathbb{R}$ entonces v es continua en $[a,b]$ y por lo tanto existe $M > 0$ tal que $|v(t)| \leq M$ para todo $t \in [a,b]$. Por lo tanto se tiene que

$$||x(t)|| \leq ||x_0|| e^{\int_{t_0}^{t} v(s) ds} \leq ||x_0|| e^{M(b-t_0)}.$$

Sea el compacto $K = \{(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : \quad a \leq t \leq b \text{ y } ||x|| \leq ||x_0|| e^{M(b-t_0)}\}$. Entonces $(t, x(t)) \in K$ para todo $t \in (a,b)$, lo que contradice el teorema de salida de compactos.

Parte 1) b). Si tomamos $y = 0$, como $f(0) = 0$ tenemos que

$$\|f(x)\| \leqslant k\|x\| \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^n.$$

Por lo tanto, tomando $v(t) = k$ y aplicando la parte anterior tenemos que las soluciones maximales están definidas para todo real.

Parte 2) a). Discutiendo según en que zonas se encuentran y e y' no es difícil probar que f cumple que $|f(y) - f(y')| \leq 2|y - y'|$ para todo $y, y' \in \mathbb{R}$. Entonces

$$\|F(x,y)-F(x',y')\| = ||(y,-x-f(y))-(y',-x'-f(y'))|| = ||(y,-x)-(y',-x')+(0,-f(y)+f(y'))||$$

$$\leq ||(y,-x) - (y',-x')|| + ||(0,-f(y) + f(y'))||$$

Como $||(y,-x) - (y',-x')|| = ||(x,y) - (x',y')||$ entonces

$$||(y,-x) - (y',-x')|| + ||(0,-f(y) + f(y'))|| = ||(x,y) - (x',y')|| + ||(0,-f(y) + f(y'))||$$

Como $||(0,-f(y)+f(y'))|| \leq ||(x-x',-f(y)+f(y'))||$ y $|f(y)-f(y')| \leq 2|y-y'|$ se tiene que $||(0,-f(y) + f(y'))|| \leq 2||(x,y) - (x',y')||$. Por lo tanto se tiene que

$$\|F(x,y) - F(x',y')\| \leq 3||(x,y) - (x',y')||.$$

Por lo tanto F está en las hipótesis de Picard y por la parte anterior el intervalo maximal de cualquier solución es $\mathbb{R}$.

Parte 2) b). El único punto de equilibrio es $(0,0)$. Como

$$DF_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},$$

y los valores propios son $\lambda = 1$ doble. Por el teorema de Hartman tenemos que $(0,0)$ es un punto de equilibrio inestable.