Ecuaciones Diferenciales **15 de diciembre de 2016.**

Examen

No. Examen	Apellido y nombre	Firma	Cédula

Ejercicio 1 (50pts)

1. (15pts) Buscando soluciones de la forma $X(x).Y(y)$ encontrar un candidato a solución a la ecuación

$$(I)\begin{cases} u_{xx} - \frac{1}{y}u_y = 0 \quad \text{para todo } (x,y) \in (0,\pi)\times(0,+\infty), \\ u(0,y) = u(\pi,y) = 0 \quad \text{para todo } y \in [0,1], \\ u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^3}\sin(nx) \quad \text{para todo } x \in [0,\pi], \\ u \text{ de clase } C^2 \text{ en } (0,\pi)\times(0,+\infty) \text{ y continua en } [0,\pi]\times[0,+\infty). \end{cases}$$

2. (15pts) Probar que el candidato u a solución hallado en la parte anterior verifica:

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\partial u_n(x,y)}{\partial y}$$

para todo $(x,y) \in (0,\pi)\times(0,+\infty)$.

Si se usa un resultado se debe enunciar. Solo enunciar, NO demostrar.

3. (10pts) Consider la siguiente ecuación en derivadas parciales

$$u_{xx} - \frac{1}{y}u_y = e^x(y^2+2) \quad (x,y) \in (0,\pi)\times(0,+\infty).$$

Hallar una solución de la forma $p(x,y) = e^x f(y)$, con f polinómica.

4. (10pts) Buscar un candidato a solución para la siguiente ecuación:

$$(II)\begin{cases} u_{xx} - \frac{1}{y}u_y = e^x(y^2+2) \quad \text{para todo } (x,y) \in (0,\pi)\times(0,+\infty), \\ u(0,y) = y^2+4 \quad u(\pi,y) = e^{\pi}(y^2+4) \quad \text{para todo } y \in [0,1], \\ u(x,0) = 4e^x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^3}\sin(nx) \quad \text{para todo } x \in [0,\pi], \\ u \text{ de clase } C^2 \text{ en } (0,\pi)\times(0,+\infty) \text{ y continua en } [0,\pi]\times[0,+\infty). \end{cases}$$

Ejercicio 2 (50pts)

1. *a*) (15pts) Supongamos que $f : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es una función continua, localmente Lipschitziana y tal que existe una función $v : \mathbb{R} \to [0,+\infty)$ continua con

$$\|f(t,x)\| \leqslant v(t)\|x\| \text{ para todo } (t,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n.$$

Demostrar que las soluciones maximales de la ecuación $\begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ están definidas en $\mathbb{R}$. (ejercicio 6 del práctico 5)

Si se usa un resultado se debe enunciar. Solo enunciar, NO demostrar.

b) (10pts) Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ continua, con $f(0) = 0$ y tal que existe $k > 0$ tal que

$$\|f(x) - f(y)\| \leqslant k\|x - y\| \text{ para todo } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Demostrar que las soluciones maximales de la ecuación $\left\{ \begin{array}{l} x' = f(x) \\ x(t_0) = x_0 \end{array} \right.$ están definidas en $\mathbb{R}$.

2. Consideremos la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como $f(y) = \left\{ \begin{array}{ll} 2y + 4, & \text{si } y < -1 \\ -2y, & \text{si } y \geq -1 \end{array} \right.$ y la ecuación diferencial $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -x - f(y) \end{pmatrix} = F(x, y)$.

   a) (16pts) Probar que F está en la hipótesis de Picard. Hallar el intervalo maximal de las soluciones.

   b) (9pts) Estudiar estabilidad de su punto de equilibrio.

Para aprobar el examen el puntaje mínimo es 60 puntos o tener un problema completo bien .