Soluciones de ecuaciones diferenciales Julio 2015

Ejercicio 1

a) Dado que la función $f(x)$ ya es una suma de senos, la serie de fourier es la misma función.

b) Debemos encontrar una función $U(x,t)$ que satisfasga las condiciones iniciales y de borde, aparte de la ecuación diferencial, para ello supondremos en principio una solución de la forma $U(x,t) = F(x)G(t)$. Suponiendo esto, para que la misma cumpla con las condiciónes:

$$F(0)G(t) = 0$$
$$F(\pi)G(t) = \pi$$
$$F(x)G(0) = x + f(x) \ con \ x \ \epsilon \ [0,\pi]$$
$$F''(x)G(t) = F(x)G'(t)$$

Se puede observar que de la segunda condición obtenemos que $F(\pi) = \frac{\pi}{G(t)}$. Dado que F es una función que depende solo de x, G(t) tendría que ser una constante. Sin embargo esto implica que $U(x,t) = U(x)$ ya que la misma no dependería del tiempo. En este caso para que la función verifique la ecuación diferencial se tendría que:

$$U_{xx} = 0$$

por lo que $U(x) = ax + b$, lo que no verifica la condición inicial.
Consideraremos la función $U(x,t)$ de la siguiente forma: $U(x,t) = \overline{U}(x,t) + x$
Imponiendo las condiciones tendremos que:

$$\begin{cases} U(0,t) = \overline{U}(0,t) = 0 \\ U(\pi,t) = \overline{U}(\pi,t) + \pi = \pi \\ U(x,0) = \overline{U}(x,0) + x = x + f(x) \\ U_{xx} = \overline{U}_{xx} = U_t = \overline{U}_t \end{cases} \tag{1}$$

Suponiendo que $\overline{U}(x,t) = F(x)G(t)$, tendrá que verificar que:

$$\begin{cases} F(0)G(t) = 0 \\ F(\pi)G(t) = 0 \\ F(x)G(0) = f(x) \\ F''(x)G(t) = F(x)G'(t) \end{cases}$$

De la primera condición obtenemos que o bien $F(0) = 0$ o $G(t) = 0$. Dado que la segunda opción no verifica las condición inicial, se tendrá que $F(0) = 0$. Analogamente para la segunda obtenemos que $F(\pi) = 0$. De la ultima condición tenemos que:

$$\frac{G'}{G}(t) = \frac{F''}{F}(x) = \lambda$$

Por lo que:

$$\begin{cases} F'' - \lambda F = 0 \\ G' - \lambda G = 0 \end{cases}$$

Se puede verificar que para λ positivo o cero F no verifica las condiciones iniciales y de borde, por que tomaremos $\lambda = -\alpha^2$. Resolviendo la ecuación para λ negativo e imponiendo que $F(0) = F(\pi) = 0$ obtenemos que:

$$F(x) = Asen(nx)$$

con n natural. Resolviendo la ecuación para G:

$$G(t) = Be^{-n^2 t}$$

Por lo que $\overline{U}_n(x,t) = C_n sen(nx)e^{-n^2 t}$. Por último para que verifique la condición inicial:

$$\overline{U}(x,t) = 3sen(x)e^{-t} - 2sen(3x)e^{-9t}$$

La solución al problema será:

$$U(x,t) = 3sen(x)e^{-t} - 2sen(3x)e^{-9t} + x$$

c)

$$\lim_{t \to +\infty} U(x,t) = x$$

Podemos observar que cuando el tiempo tiende a más infinito tiende a una solución estacionaria, donde la temperatura sube linealmente del borde más frio $x = 0$ al borde más caliente $x = \pi$.

Ejercicio 2

a) Ver teórico.

b) Igualando las derivadas a cero se obtiene que los puntos de críticos son los de la recta $x = 0$.

c) Linealizando obtenemos que la matriz Jacobiana evaluada en un punto de equilibrio genérico $(0, y_0)$ es:

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} y_0 - 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

que tiene valores propios $y_0 - 1$ y 0. Dado que tiene un valor propio cero, solo podemos concluir que cuando $y_0 - 1 > 0$ es inestable, por lo que los puntos con $y_0 > 1$ son inestables.

d) Consideremos la función $V(x,y) = x^2 + (y - y_0)^2$ con $(0, y_0)$ el punto de equilibrio. Se puede verificar que la misma es una función definia positiva en y_0. Haciendo la derivada obtenemos que:

$$\dot{V} = 2x^2(y-1) - 4x^2(y - y_0)$$

la cual es definida seminegativa para $y_0 < 1$. Se observa que para cualquier entorno alrededor del punto $(0, y_0)$ los puntos con $x = 0$, $\dot{V} = 0$, por lo que no es definida negativa. Nos falta estudiar la estabilidad en el punto (0,1), para ello trataremos de encontrar una preintegral. Considerancdo $H(x,y) = F(x) + G(y)$ se tiene que:

$$F_x x(y-1) - 2G_y x^2 = 0$$

De donde se obtiene que:

$$\frac{F_x(x)}{x} = \frac{2G_y(y)}{y-1} = A \ (cte)$$

Resolviendo las ecuaciones obtenemos que $H(x,y) = x^2 + \frac{y^2}{2} - y$ (con $A = 2$) lo que nos indica que las soluciones están incluidas en elipses de centro (0,1). $H(x,y)$ es una función del Lyapunov para el punto (0,1), por lo que (0,1) es un punto de equilibrio estable.

e) Dado que los puntos de equilibrio no son aislados, los mismos no pueden ser asintóticamente estables.

Ejercicio 3

a) El único punto de equilibrio es el (0,0).

b) Se puede observar que las soluciones con $x_0 = 0$ e $y_0 > 0$ están incluidas en la recta x=0. Dado que $\dot{y}$ es positivo esta solucion se aleja del origen, por lo que es inestable.

c) Resolviendo la ecuación por el método de separación de variables se tiene que:

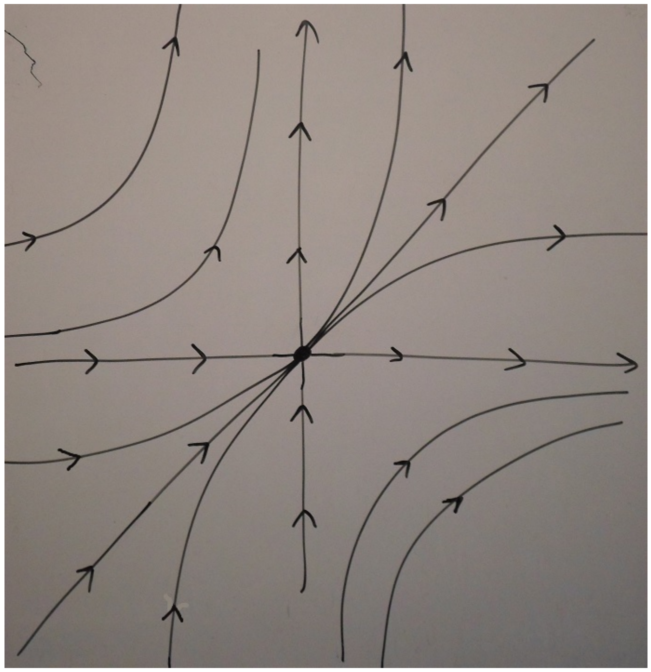
$$x(t) = \frac{1}{\frac{1}{x_0} + t_0 - t}$$

$$y(t) = \frac{1}{\frac{1}{y_0} + t_0 - t}$$

Despejando el tiempo de una de las ecuaciones y sustituyendolo en la otra se obtiene:

$$y = \frac{x}{(\frac{1}{y_0} - \frac{1}{x_0})x + 1}$$

Se puede observar que para $x_0 = y_0$ la solución está incluida en la recta $x = y$ y el resto de las trayectorias estararán incluidas en hipérbolas, donde las asíntotas dependen de las condiciones iniciales. Con eso sumado a que las derivadas son siempre positivas se construye el siguiente diagrama de fases:



d) De las soluciones obtenidas podemos ver que las mismas no están definidas en

$$t_1 = t_0 + \frac{1}{x_0}$$

$$t_2 = t_0 + \frac{1}{y_0}$$

Empecemos con el caso $0 < x_0 < y_0$. En este caso $t_0 < t_2 < t_1$ por lo que la solución estará definida hasta t_2. Para tiempos anteriores a t_0 la solución esta definida, por lo que su intervalo maximal es $(-\infty, t_2)$. Analogamente cuando $0 < y_0 < x_0$ se tiene que el intervalo maximal es $(-\infty, t_1)$.
Para el caso $x_0 < y_0 < 0$ se tiene que $t_2 < t_1 < t_0$ por lo que las soluciones estarán definidas en $(t_2, +\infty)$. Si $y_0 < x_0 < 0$ el intervalo maximal es $(t_1, +\infty)$.
Para $x_0 < 0 < y_0$ se cumple que $t_1 < t_0 < t_2$ obteniendose entonces que el intervalo maximal es (t_1, t_2). Analogo para $y_0 < 0 < x_0$ se tiene que (t_2, t_1).
Por último si $x_0 = y_0$, $t_1 = t_2$. Si ambos eran negativos, $t_1 < t_0$ lo que nos lleva a que el intervalo maximal es $(t_1, +\infty)$. En caso contrario, el intervalo será $(-\infty, t_1)$.
Tambien podría haberse llegado a estas deducciones por el diagrama de fases. Por ejemplo, cuando la solucion tiende una asintota vertical, $x(t)$ tiende a infinito mientras que $y(t)$ tiende a una constante, lo que nos indica que el tiempo está tendiendo a t_1. Se podría haber utilizado escape de compactos para el primer y el tercer cuadrante, para el pasado y futuro respectivamente.