Examen de Ecuaciones Diferenciales.

30 de Julio de 2015.

No. de examen	Apellido y nombre	Firma	Cédula

En todos los casos se deben justificar las respuestas, haciendo referencia a los resultados utilizados. El mínimo para aprobar el examen son 50 puntos y uno de los problemas completamente resuelto.

1. (30 pts.)

   a) Hallar la serie de Fourier de la función definida por:
   $$f(x) = 3\text{sen}(x) - 2\text{sen}(3x)$$

   b) Hallar la solución $u(x,t)$ de la ecuación del calor, $u_t = u_{xx}$, en $\Omega = (0,\pi) \times (0,\infty)$ con condiciones de borde
   $$u(0,t) = 0, \; u(\pi,t) = \pi; \; t \geq 0,$$
   y dato inicial
   $$u(x,0) = u_0(x) = x + f(x); \; x \in [0,\pi].$$

   c) Calcular
   $$\lim_{t\to+\infty} u(x,t)$$
   e interpretar el resultado.

2. (40 pts.) Se considera el sistema
   $$\begin{cases} \dot{x} = x(y-1) \\ \dot{y} = -2x^2 \end{cases}$$

   a) Hallar los puntos críticos.

   b) Investigar si la linealización permite sacar conclusiones sobre la estabilidad de éstos.

   c) Encontrar una función de Lyapunov pata estudiar la estabilidad de aquellos puntos críticos aun sin clasificar.

   d) Existen puntos críticos asintóticamente estables? Justificar

   e) Enunciar y demostrar el teorema de Lyapunov que asegura estabilidad.

3. (30 pts.) Se considera el sistema
   $$\begin{cases} \dot{x} = x^2 \\ \dot{y} = y^2 \end{cases}$$

   a) Hallar los puntos críticos.

   b) Estudiar estabilidad del origen.

   c) Dibujar diagrama de fase. Puede ser útil estudiar el comportamiento en $y = x$ y hallar explícitamente las soluciones.

   d) Estudiar intervalo maximal de las soluciones.