

# Examen de Ecuaciones Diferenciales.

25 de febrero de 2015.

| No. de examen | Apellido y nombre | Firma | Cédula |
|---------------|-------------------|-------|--------|
|               |                   |       |        |

**En todos los casos se deben justificar las respuestas, haciendo referencia a los resultados utilizados. El mínimo para aprobar el examen son 50 puntos y uno de los problemas completamente resuelto.**

1. a) Hallar la serie de Fourier de la función  $f$ ,  $2\pi$  periódica, impar, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0, \pi/2] \\ -x + \pi & \text{si } x \in [\pi/2, \pi] \end{cases}$$

- b) Hallar la solución  $u(x, t)$  de la ecuación del calor,  $u_t = u_{xx}$ , en  $\Omega = (0, \pi) \times (0, \infty)$  con condiciones de borde

$$u(0, t) = 0, \quad u(\pi, t) = 0; \quad t \geq 0,$$

y dato inicial

$$u_0(x) = f(x); \quad x \in [0, \pi].$$

- c) Hallar la solución  $u(x, t)$  de la ecuación del calor en  $\Omega = [0, \pi] \times [0, \infty)$  con condiciones de borde

$$u(0, t) = 0, \quad u(\pi, t) = -\pi; \quad t \geq 0,$$

y dato inicial

$$u_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, \pi/2] \\ -2x + \pi & \text{si } x \in [\pi/2, \pi] \end{cases} \quad x \in [0, \pi].$$

2. Sea  $\hat{x}$  un punto de equilibrio de un sistema autónomo  $\dot{x} = f(x)$ .

- a) Defina estabilidad, inestabilidad y estabilidad asintótica del punto de equilibrio.  
b) Bosqueje un posible espacio de fase plano con la propiedad que toda solución se aproxima a un punto de equilibrio cuando  $t \rightarrow +\infty$ , y sin embargo el punto de equilibrio no es estable.  
c) Considere el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\dot{x} = y + \lambda x(x^2 + y^2)$$

$$\dot{y} = -x + \lambda y(x^2 + y^2),$$

donde  $\lambda$  es un parámetro real. Discutir según  $\lambda$  la estabilidad en el origen. Justificar.

3. Sea  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  una función de clase  $C^2$  que tiene solamente tres puntos críticos, dos de los cuales son mínimos relativos, y uno que es un punto silla. Se considera la siguiente ecuación diferencial

$$\dot{x} = -\nabla F(x)$$

- a) Probar que hay tres puntos de equilibrio, dos de ellos asintóticamente estables y uno inestable.  
b) Bosquejar un posible diagrama de fase.