Ecuaciones Diferenciales
Soluciones examen diciembre

16 de diciembre de 2015.

Ejercicio 1 Buscando soluciones de la forma $u(x,y) = X(x)Y(y)$, la condición $u_{xx} + u_{yy} = 0$ implica $X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = 0$. Por lo tanto

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = \lambda \ (cte).$$

Entonces hay que resolver las ecuaciones $X''(x) - \lambda X(x) = 0$ y $Y''(y) + \lambda Y(y) = 0$. La condición $u(0,y) = 0$ implica $X(0) = 0$ y $u(\pi, y) = 0$ implica $X(\pi) = 0$. Por lo tanto hay que resolver

$$X'' - \lambda X = 0 \text{ con las condiciones } X(\pi) = X(0) = 0.$$

Resolviendo esta última ecuación tenemos que $X(x) = A_n sen(nx)$ y que $\lambda = -n^2$ con $n \in \mathbb{N}$.

La ecuación $Y''(y) - n^2 Y(y) = 0$ tiene como solución $Y(y) = B_n e^{ny} + C_n e^{-ny}$. La condición $u(x,\pi) = 0$ implica $Y(\pi) = 0$, por lo tanto $Y(\pi) = B_n e^{n\pi} + C_n e^{-n\pi} = 0$ implica que $B_n = -C_n e^{-2n\pi}$. Entonces

$$Y(y) = -C_n e^{-2n\pi} e^{ny} + C_n e^{-ny} = C_n(-e^{n(y-2\pi)} + e^{-ny}).$$

Por lo tanto, tenemos que

$$u_n(x,y) = sen(nx) D_n(-e^{n(y-2\pi)} + e^{-ny}) \text{ donde } D_n = A_n C_n.$$

Si consideramos $u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,y)$ entonces la condición $u(x,0) = x(\pi - x)$ implica que

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n(1 - e^{-2n\pi}) sen(nx) = x(\pi - x).$$

Por lo que $D_n(1 - e^{-2n\pi})$ debe ser el coeficiente de Fourier de la extensión impar de la función $f(x) = x(\pi - x)$ en el intervalo $[-\pi, \pi]$. Por lo tanto

$$D_n(1 - e^{-2n\pi}) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x(\pi - x) sen(nx) dx = \frac{4}{\pi n^3}((-1)^{n+1} + 1)$$

Entonces el candidato a solución es

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi n^3}((-1)^{n+1} + 1) \frac{1}{(1 - e^{-2n\pi})} sen(nx)(-e^{n(y-2\pi)} + e^{-ny})$$

b) Vamos a probar que u verifica la condición $u_{xx} + u_{yy} = 0$ ya que las demás condiciones son muy fáciles de verificar. Lo difícil es probar que

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\partial^2 u_n(x,y)}{\partial x^2} \text{ y que } \frac{\partial^2}{\partial y^2}\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\partial^2 u_n(x,y)}{\partial y^2}.$$

Si asumimos esto último, vale entonces

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x,y)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x,y)=$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\partial^2 u_n(x,y)}{\partial x^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\partial^2 u_n(x,y)}{\partial y^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\partial^2 u_n(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_n(x,y)}{\partial y^2}=0.$$

Probemos que $\frac{\partial}{\partial x}\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\partial u_n(x,y)}{\partial x}$ ya que las igualdades

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\partial^2 u_n(x,y)}{\partial x^2}$$

y

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\partial^2 u_n(x,y)}{\partial y^2}$$

se demuestran en forma análoga.

Para esto necesitamos de los siguientes resultados:

Proposition 0.1. *Sea $\{u_n\}$ una sucesión de funciones $u_n : X \to \mathbb{R}$ que verifica:*

- *$|u_n(x)| \le M_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y para todo $x \in X$,*
- *la serie $\sum M_n$ es convergente*

Entonces existe $u : X \to \mathbb{R}$ tal que $\sum u_n(x)$ converge uniformemente a u.

Proposition 0.2. *Sea $\{u_n\}$ una sucesión de funciones $u_n : X \to \mathbb{R}$ de clase C^1 que verifica:*

- *Existe $x_0 \in X$ tal que $\sum u_n(x_0)$ es convergente.*
- *la serie $\sum \frac{\partial}{\partial x}u_n(x)$ converge uniformemente a una función v.*

Entonces $\frac{\partial}{\partial x}\sum u_n(x) = \sum \frac{\partial}{\partial x}u_n(x)$ y $\sum u_n(x)$ converge uniformemente a una función u que cumple que $u^{'} = v$.

En nuestro caso, tenemos

$$\frac{\partial u_n}{\partial x}(x,y)=\frac{4}{\pi n^3}((-1)^{n+1}+1)\frac{1}{(1-e^{-2n\pi})}ncos(nx)(-e^{n(y-2\pi)}+e^{-ny}),$$

Sea $\delta > 0$ y consideremos los puntos (x,y) dentro del rectángulo $[0,\pi]\times[\delta,\pi]$. Como $y \ge \delta$, tenemos que

$$e^{-ny} \le e^{-n\delta}.$$

A su vez, como $y \leq \pi$, tenemos que $y - 2\pi \leq -\pi$, por lo que

$$e^{n(y-2\pi)} \leq e^{-n\pi}.$$

Luego, podemos acotar de la siguiente manera

$$\left|\frac{\partial u_n}{\partial x}(x,y)\right| \leq \left|\frac{4}{\pi n^3}((-1)^{n+1}+1)\frac{1}{(1-e^{-2n\pi})}\right| n(e^{-n\pi}+e^{-n\delta}) \leq \frac{16}{\pi n^2}(e^{-n\pi}+e^{-n\delta}) = M_n.$$

Como M_n es convergente, podemos aplicar las Proposiciones 0.1 y 0.2.

Ejercicio 2 a) Ver teórico.

b) Primero vamos a probar que la función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = \int_0^x (e^s - 1)ds$ cumple que $g(x) > 0$ si $x \neq 0$ y que $g(0) = 0$. Como $g(x) = \int_0^x (e^s - 1)ds$ entonces $g^{'}(x) = e^x - 1$, por lo que g tiene un mínimo en $x = 0$. Como $g(0) = 0$, concluimos que $g(x) > 0$ si $x \neq 0$. Ahora es claro que $V(0,0) = 0$ y que si $(x,y) \neq (0,0)$ se cumple que $V(x,y) > 0$.

c) Dada la ecuación $x^{''} + e^x - 1 = 0$, llamamos $y = x^{'}$. Entonces $y^{'} = x^{''} = -e^x + 1$. Por lo tanto, con este cambio de variable, la ecuación se transforma en

$$\begin{aligned} x^{'} &= y \\ y^{'} &= -e^x + 1 \end{aligned}$$

Si calculamos $\dot{V}$ tenemos que $\dot{V}(x,y) = y\dot{y} + (e^x - 1)\dot{x} = y(-e^x + 1) + (e^x - 1)y = 0$. Lo que implica que V es una preintegral y por lo tanto las soluciones están incluidas en las curvas de nivel de V.
Como V tiene un mínimo estricto en $(0,0)$, por el Teorema de Liapunov 1 el $(0,0)$ es un punto de equilibrio estable.
Veamos ahora que no es asíntoticamente estable. Notar que $V(x,y) = 0$ implica que $(x,y) = (0,0)$. Luego, la curva de nivel $V = 0$ consiste sólo del punto $(0,0)$. Esto implica que cualquier curva de nivel $V(x,y) = c$, con $c > 0$, debe estar a distancia positiva del $(0,0)$. Como las soluciones están contenidas en las curvas de nivel, el $(0,0)$ no es asintóticamente estable.