# Examen de Ecuaciones Diferenciales.

1 de agosto de 2014.

| No. de examen | Apellido y nombre | Firma | Cédula |
|---|---|---|---|
| | | | |

**En todos los casos se deben justificar las respuestas, haciendo referencia a los resultados utilizados. El mínimo para aprobar el examen son 50 puntos.**

1. (20 pts.) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f = (f_1, f_2)$, una función de clase $C^1$ tal que existe un número real $K > 0$ tal que $\{||f(x)|| : x \in \mathbb{R}^2\} \subset [-K, K]$. Se considera la ecuación diferencial $(\dot{x}, \dot{y}) = f(x, y)$.

   *a*) Demostrar que las soluciones están definidas para todo $t \in \mathbb{R}$.

   *b*) Bosquejar las soluciones sabiendo que:

   - Si $y > 1$, entonces $f_1(x, y) > 0, f_2(x, y) > 0$;
   - Si $y = 1$, entonces $f_1(x, y) > 0, f_2(x, y) = 0$;
   - Si $y = 0$, entonces $f_1(x, y) < 0, f_2(x, y) = 0$;
   - Si $y < 0$, entonces $f_1(x, y) < 0, f_2(x, y) > 0$;
   - $(0, 1/2)$ es el único punto de equilibrio del sistema, y todas las órbitas por puntos de la forma $(x_0, y_0)$ con $y_0 \in (0, 1)$ son periódicas.

   *c*) Estudiar la estabilidad del punto de equilibrio.

2. (20 pts.)

   *a*) Enunciar el teorema de Hartman.

   *b*) Se considera el sistema de ecuaciones

   $$\begin{cases} \dot{x} = e^x - 1 - y \\ \dot{y} = x^2 + \frac{9}{4}x \end{cases}$$

   Hallar los puntos de equilibrio y clasificarlos.

   *c*) Bosquejar el diagrama de fases de $\dot{X} = J_{(0,0)}fX$ donde $J_pf$ denota la matriz Jacobiana de la función $f(x, y) = (e^x - 1 - y, x^2 + \frac{9}{4}x)$.

3. (30 pts.) Se tiene el siguiente la siguiente ecuación

   $$\dot{x}(t) = x(t) - t^2 + 1$$

   *a*) Hallar el lugar de los puntos críticos de las soluciones de la ecuación.

   *b*) Clasificar dichos puntos críticos en máximos o mínimos.

   *c*) Encontrar una solución particular $\varphi_p(t)$(sugerencia: buscarla como un polinomio de segundo grado).

   *d*) Encontrar el lugar donde se dan los puntos de inflexión de las soluciones.

   *e*) Sea $\varphi(t)$ una solución. Mostrar que $\varphi(t) - \varphi_p(t)$ es solución de una ecuación diferencial, que se hallará. Deducir que el intervalo maximal de todas las soluciones es $\mathbb{R}$.

   *f*) Bosquejar las soluciones.

4. (30 pts.) Se considera el siguiente sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = y(1+x)(1-x) \\ \dot{y} = -x(1+x)(1-x) \end{cases}$$

*a*) Hallar los puntos de equilibrio.

*b*) Hallar $V : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que las órbitas del sistema estén contenidas en las curvas de nivel de $V$. (Sug: Comparar el sistema con $\dot{x} = y$, $\dot{y} = -x$)

*c*) Dibujar el diagrama de fase.

*d*) Estudiar los intervalos maximales de las soluciones.

*e*) Estudiar estabilidad de los puntos de equilibrio.