SOLUCIÓN EXAMEN FEBRERO 2014

1. Utilizando el método de variables separables, suponemos u de la forma:
   $u(x,t) = X(x)Y(y)$

   u debe verificar la ecuación, por lo tanto:
   $\frac{X''}{X} = -\frac{Y'}{Y} = \lambda$

   Llegamos a la igualdad de dos funciones de variables distintas e independientes, por lo que dicha igualdad se da únicamente para la constante λ.

   Esto resulta en 2 ecuaciónes:

   I) $X' - \lambda$X

   a) $X(x) = ABx + B \quad \lambda = 0$

   b) $X(x) = Ae^{\sqrt{\lambda}x} + Be^{-\sqrt{\lambda}x} \quad \lambda > 0$

   c) $X(x) = Asin(\sqrt{-\lambda}x) + Bcos(\sqrt{-\lambda}x) \quad \lambda < 0$

   II) $T'' + \lambda$T

   a) $Y(y) = Cy + D \quad \lambda = 0$

   b) $Y(y) = Ce^{\sqrt{\lambda}y} + De^{-\sqrt{\lambda}y} \quad \lambda > 0$

   c) $Y(y) = Csin(\sqrt{-\lambda}y) + Dcos(\sqrt{-\lambda}y) \quad \lambda < 0$

   Las primeras condiciones de borde están dadas por:
   $u(0,y) = u(\pi,y) \longrightarrow X(0)Y(y) = X(\pi)Y(y) \longrightarrow X(0) = X(\pi) = 0$

   Si imponemos esta condición para resolver I) , vemos que se verifica únicamente para el caso $\lambda < 0$ (Resta verificar que para los otros dos casos la solucion a la cual se llega es trivial).
   Donde:

   $X(0) = 0 \quad \longleftrightarrow \quad B = 0$
   $X(0) = 0 \quad \longleftrightarrow \quad -\lambda = k^2 \; k\epsilon Z$

$\Longrightarrow X(x) = Asen(kx)$

Dado que $\lambda < 0$, la solución II) está dada por:
$\Longrightarrow Y(y) = Ce^{ky} + De^{-ky} \; k\epsilon Z$

De esta forma y renombrando las constantes, resulta que la solución a la cual llegamos es de la forma:
$u_k(x,t) = sin(kx)\{A_k e^{ky} + B_k e^{-ky}\}$

Resta entonces, imponer las restantes condiciones de borde: $u(x,0) = u(x,\pi) = f(x) = x(x-\pi)$

Para ello, utilizando el principio de superposición, porponemos una solución de la forma:
$u(x,t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} sin(kx)\{A_k e^{ky} + B_k e^{-ky}\}$

De esta forma:
$u(x,0) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} sin(kx)\{A_k + B_k\} = x(x-\pi)$
$u(x,0) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} sin(kx)\{A_k e^{k\pi} + B_k e^{-k\pi}\} = x(x-\pi)$

Resulta entonces, que los A_k y B_k se obtienen a partir de los coeficientes del desarrollo de Fourier Tipo Seno de $f(x) = x(x-\pi)$:

Hallémoslos:
$b_k(f(x)) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} x(x-\pi)sin(kx)$
$b_k(f(x)) = \frac{2}{k^3\pi}(cos(k\pi)-1) = \frac{2}{k^3\pi}((-1)^k - 1)$

Resta resolver entonces, el sistema:

$$\begin{cases} A_k + B_k = b_k(f(x)) \\ A_k e^{k\pi} + B_k e^{-k\pi} = b_k(f(x)) \end{cases}$$

De la primera igualdad, se obtiene:

$$\Longrightarrow A_k = b_k(f(x)) - B_k$$

Por lo que, sustituyendo en la segunda igualdad:
$\longrightarrow (b_k(f(x)) - B_k)e^{k\pi} + B_k e^{-k\pi} = b_k(f(x))$
$\longrightarrow B_k(e^{k\pi} - e^{-k\pi}) = b_k(1 - e^{-k\pi})$
$\longrightarrow B_k 2senh(k\pi) = b_k e^{-k\pi/2}(e^{k\pi/2} - e^{-k\pi/2})$
$\longrightarrow B_k 2senh(k\pi) = b_k e^{-k\pi/2} 2senh(k\pi/2)$

$$\Longrightarrow B_k = b_k e^{-k\pi/2}\frac{senh(k\pi/2)}{senh(k\pi)}$$

2. *a*) Ver solución Primer Parcial 2013, Problema 1.

   b)
   - Como la ecuación está definida mediante la composición de funciones $\mathbb{C}^1$, estamos bajo las hipotesis del Teorema de Picard y por lo tanto para cada CI, la solución es única. Ahora, para probar que las soluciones están definidas para todo tiempo, basta notar que tenemos la composición de una función acotada, como lo es $sen(x)$, con $f\epsilon\mathbb{C}^1(\mathbb{R})$ y por lo tanto el codominio de f también estará acotado. Entonces, de acuerdo a lo probado en la parte anterior, resulta que las soluciones estan definidas para todo tiempo.
   - Veamos en primer lugar los puntos críticos, los cuales estan dados por: $f(sen(x)) = 0$

     Por como está definida f, esta solo se anula en cero, entonces:
     $f(sen(x)) = 0 \longleftrightarrow sen(x) = 0 \longleftrightarrow x = k\pi \ k\epsilon\mathbb{Z}$

     Pasemos ahora a mirar el signo de $x^{'}$. Nuevamente, por como esta definida f, resulta que esta es siempre positiva y por ende x es siempre creciente.

     Como paso siguiente, estudiaremos el lugar geométrico de los puntos de inflexión, es decir, donde $x^{''}$ se anula, esto es: $f^{'}(sen(x))cos(x) = 0$

     $\longrightarrow x = k\pi$ (Puntos de equilibrio) ó
     $\longrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

     Por último, se puede probar facilmente que si tenemos x_1 solución, entonces $x_2 = x_1 + 2k\pi$ también es solución.

     Con la información reunida anteriormente se puede hacer un bosquejo de las soluciones (Ver imagen adjunta).

3. *a*) Como la función $f(x,y) = (x^2-1, y^2-1)$ que define la ecuación es $\mathbb{C}^\infty$, podemos afirmar que nos encontramos bajo las hipotesis del Teorema de Picard.

   b) Los puntos de equilibrio estan dados por:

$$\begin{cases} x^2 - 1 = 0 \\ y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \pm 1 \\ y = \pm 1 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow A = \{(x,y)\epsilon\mathbb{R} | f(x,y) = 0\} = \{(1,1); (1,-1); (-1,1); (-1,-1)\}$$

   Donde A es el conjunto de los puntos de equilibrio.

   Veamos ahora, la estabilidad de los mismos. Para ello vamos a calcular el Jacobiano de $f(x,y)$ y estudiemos el sistema linealizado en el entorno de cada punto de equilibrio. Esto es con el objetivo de aplicar el Teorema de Hartman. En el caso de que los valores propios del Jacobiano evaluado en el punto de equilibrio, no tengan parte real nula, entonces el comportamiento del sistema linealizado es análogo al del sistema original en un entorno. Y por lo tanto, los valores propios nos podran decir la estabilidad o no de dicho punto.

$$J_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 2y \end{pmatrix}$$

- (1,1)

  $$J_f(1,1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

  El valor propio es 2 doble y por ende el punto de equilibrio (1,1) es INESTABLE
- (1,-1)

  $$J_f(1,-1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

  Los valores propios son 2 y -2 y por ende el punto de equilibrio es INESTABLE (Se trata de un punto silla)
- (-1,1)

  $$J_f(-1,1) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

  Los valores propios son 2 y -2 y por ende el punto de equilibrio es INESTABLE (Se trata de un punto silla)
- (-1,-1)

  $$J_f(-1,-1) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

  El valor propio es -2 doble y por ende el punto de equilibrio es ESTABLE

c) Como se puede apreciar, las ecuaciones están desacopladas. Por lo tanto, para estudiar el intervalo maximal de las soluciones, basta estudiar el intervalo maximal de la ecuación: $z^{'} = z^2 - 1$

En primer lugar vemos que los puntos de equilibrio estan dados por $z = \pm 1$ Luego, estudiando el signo de $z^{'}$, obtenemos:

- $z^{'} > 0$ si $z > 1$ ó $z < -1$
- $z^{'} < 0$ si $-1 < z < 1$

Luego, resolviendo la ecuación de variables separables, se llega a que las soluciónes que no corresponden a puntos de equilibrio están dadas por:

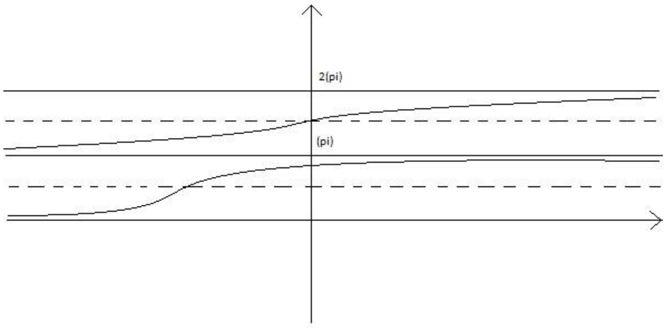
$$\frac{1}{2}[ln(\frac{z-1}{z+1})+ln(\frac{z_0+1}{z_0-1})]=t-t_0$$

Entonces, para aquellas soluciones cuya CI $z_0\epsilon(1,-1)$, resulta que estan definidas para todo tiempo, puesto que están contenidas entre los puntos de equilibrio. Para probar esto último, basta recordar que nos encontramos bajo las hipótesis del Teorema de Picard, por lo tanto las soluciones son únicas y además, considerar una familia de compactos adecuada para utilizar el Teorema de escape de compactos.
Para las restantes soluciones, miremos la ecuación a la cual llegamos anteriormente. Si las soluciones resultan estar acotadas temporalmente, existe un tiempo t^* para el cual $\lim\limits_{t^*\to\pm\infty} z(t)=\pm\infty$. Esto último se debe a por como es el signo de $z^{'}$. Se puede ver que:

$$t^*=\frac{1}{2}ln(\frac{z_0+1}{z_0-1})+t_0$$

d) Con la información recaudada en las partes anteriores se puede realizar el diagrama de fase (Ver imagen adjunta).

Ejercicio 2



Ejercicio 3