Examen de Ecuaciones Diferenciales.

26 de febrero de 2014.

No. de examen	Apellido y nombre	Firma	Cédula

En todos los casos se deben justificar las respuestas, haciendo referencia a los resultados utilizados. El mínimo para aprobar el examen son un problema y medio correctos.

1. Utilizar el método de separación de variables para resolver la ecuación

$$u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = 0, \qquad (x,y) \in (0,\pi) \times (0,\pi)$$

con las condiciones de borde:

$$u(0,y) = u(\pi,y) = 0, \; u(x,\pi) = u(x,0) = x(x-\pi).$$

2. *a*) Supongamos que $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es una función acotada que está en las condiciones del teorema de Picard. Mostrar que todas las soluciones de $x' = f(t,x)$ existen para todo tiempo t.

   b) Se considera el problema del valor inicial

$$\begin{cases} x' = f(\sin(x)) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

   donde $f \in C^1(\mathbb{R})$, $f(0) = f'(0) = 0$, $f'(x) < 0$ si $x < 0$ y $f'(x) > 0$ si $x > 0$.

   - Probar que para cada x_0, existe una única solución del problema, que está definida en todo $\mathbb{R}$.
   - Hacer un bosquejo de las soluciones.

3. Se tiene el siguiente sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 - 1 \\ \dot{y} = y^2 - 1 \end{cases}$$

   a) Justificar que estamos en las hipótesis de Picard.

   b) Hallar los puntos de equilibrio y estudiar estabilidad de éstos.

   c) Estudiar los intervalos maximales de las soluciones.

   d) Bosquejar el diagrama de fase.