Examen de Ecuaciones Diferenciales.

16 de diciembre de 2014.

No. de examen	Apellido y nombre	Firma	Cédula

En todos los casos se deben justificar las respuestas, haciendo referencia a los resultados utilizados. El mínimo para aprobar el examen son 50 puntos.

1. *a*) Hallar soluciones de
$$y^2Y''(y) - k^2Y(y) = 0, \ \ k \in \mathbb{N}$$
de la forma $Y(y) = y^\alpha$, con $\alpha > 0$.

   b) Hallar por el procedimiento de separación de variables una serie de funciones definida en $D = [0, \pi] \times [0, 1]$ que sea candidata a solución de:
$$u_{xx} + y^2 u_{yy} = 0$$
en el interior de D y satisfaga las condiciones
$$\begin{array}{ll} u(x,1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^4} & x \in [0,\pi] \\ u(0,y) = u(\pi,y) = 0 & y \in [0,1] \\ u(x,0) = 0 & x \in [0,\pi]. \end{array}$$

   c) Probar que la serie obtenida define una función u continua con u_{xx} y u_{yy} continuas que verifica el problema de ecuaciones en derivadas parciales planteado en la parte anterior (ecuación diferencial y sus condiciones).

2. Se considera el sistema
$$\begin{cases} \dot{x} = x(x^2 + y^2 - \beta^2) + y \\ \dot{y} = -x + y(x^2 + y^2 - \beta^2) \end{cases}$$

   a) Probar que está en las hipótesis de Picard.

   b) Estudiar la estabilidad del origen siendo β una constante real y positiva. Qué sucede si $\beta = 0$? Justificar.

   c) Dibujar el diagrama de fase. Se sugiere estudiar el sistema en polares.

   d) Estudiar intervalos maximales de sus soluciones.

3. *a*) Sea A una matriz cuadrada de orden n con entradas reales. Probar que el conjunto de las soluciones de la ecuación $\dot{x} = Ax$ es un espacio vectorial de dimensión n.

   b) Sean A, J, P matrices reales cuadradas de orden n tales que $J = PAP^{-1}$. Probar que
$$e^{Jt} = Pe^{At}P^{-1}.$$
Recordar que $e^{At} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(At)^k}{k!}$.

   c) Encontrar la solución del sistema $\dot{x} = Ax$ que en tiempo cero es $(1, 1, 1)$, siendo A la siguiente matriz:
$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 5 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$