Ejercicio 1. a) Ver teórico.
b) , 1) $b_n = 0$ por ser f par.
$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{\pi^2}{3}$.
$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos nx dx = \frac{4(-1)^n}{n^2}$.
2) Por el teorema de Dini la serie converge a f.
3) Como $x^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} cos(nx)$, entonces evuluando en $x = \pi$ se obtiene:

$$\frac{\pi^2}{3} + \sum_{1}^{+\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos n\pi = \pi^2$$

de donde simplificando se obtiene que

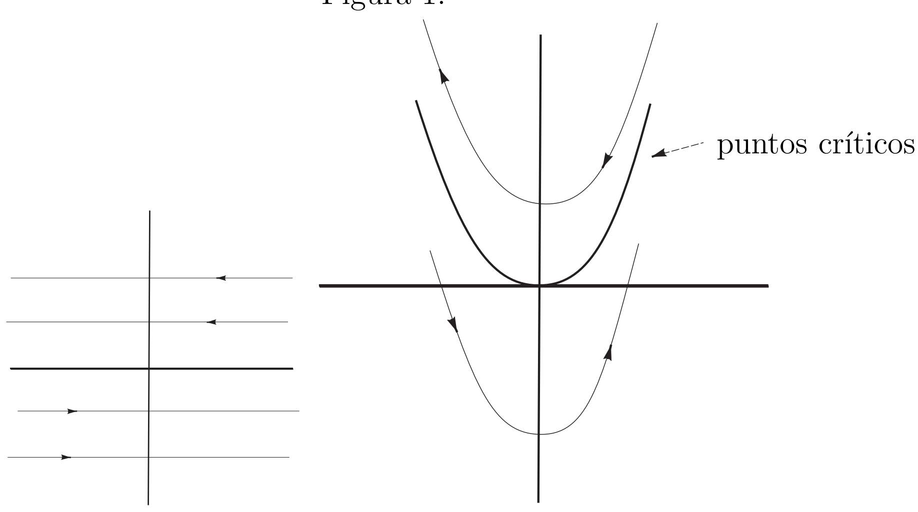
$$\sum_{1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Análogamente evaluando en $x = 0$ se deduce que

$$\sum_{1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$$

Ejercicio 2.
a) El sistema lineal queda $\begin{cases} x' = -y \\ y' = 0 \end{cases}$
y el digrama de fase es como en la figura 1 (a).

Figura 1:



(a) (b)

b) Resolviendo el sistema queda $\{(x, y) : \ y = x^2\}$.

c) $\dot{H} = \dot{y} - nx^{n-1}\dot{x} = 2x^3 - 2xy - nx^{n-1}(x^2 - y) = (x^2 - y)(2x - nx^{n-1})$. Tomando $n = 2$, queda $\dot{H} = 0$.

Por lo que el diagrama de fase queda como la figura 1 (b).

d) Del diagrama de fase se deduce que son todos inestables.

Ejercicio 3.

a) Ver teórico.

b) Resolviendo el sistema queda que el único punto crítico es el origen. Sea $V(x, y) = ax^2 + by^2$, entonces

$\dot{V} = 2ax\dot{x} + 2by\dot{y} = 2ax(3xy) + 2by(-x^2 - y^3) = x^2y(6a - 2b) - 2by^4$. Entonces tomando $a = 1$ y $b = 3$ queda V definida positiva y $\dot{V}$ semidefinida negativa. Por lo tanto el origen es estable para el futuro.

Ejercicio 4.

Ver teórico.