Ecuaciones Diferenciales
Examen febrero 2013

28 de febrero de 2013.

No. Examen	Apellido y nombre	Firma	Cédula

1. Sea el sistema:

$$(I) = \begin{cases} x' = y \\ y' = x^3 \end{cases}$$

   a) Hallar sistema lineal de (I) en $(0,0)$ y dibujar el diagrama de fase del sistema lineal de (I) en $(0,0)$. (10 puntos)
   Para el sistema (I):
   b) Hallar una preintegral de la forma $H(x,y) = \frac{y^2}{2} + \frac{Ax^4}{4}$. (5 puntos)
   c) Dibujar el diagrama de fase del sistema (I). (15 puntos)
   d) Estudiar la estabilidad del punto de equilibrio. (10 puntos)

2. *a*) Sea $f : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x(\pi - x)$.
   Hallar la serie de Fourier de tipo senos de f. (15 puntos)
   b) Sea la ecuación

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & (t,x) \in (0,+\infty) \times (0,\pi) \\ u(t,0) = 0 \text{ y } u(t,\pi) = 0 & t > 0 \\ u(0,x) = x(\pi - x) & x \in [0,\pi] \end{cases}$$

   Hallar una solución $u(x,t)$ de la forma $u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x,t)$. (15 puntos)

3. *a*) Sea (M,d) un espacio métrico completo y $T : M \to M$ una función que cumple que existe $0 < \lambda < 1$ tal que

$$d(T(x),T(y)) \leq \lambda d(x,y), \quad \forall x,y \in M.$$

   Probar que existe un único $x_0 \in M$ tal que $T(x_0) = x_0$. (15 puntos)
   b) Sean $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, con f de clase C^1, $(t_0,x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ y
   $M = \{\varphi : [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \to \overline{B(x_0,\varepsilon)},$ con φ continua $\}$ y $T : M \to M$ tal que

$$T(\varphi)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,\varphi(s))ds$$

   Probar que existen $\delta > 0$, $\varepsilon > 0$ y λ con $0 < \lambda < 1$ tales que $d(T(x),T(y)) \leq \lambda d(x,y), \quad \forall x,y \in M$. (15 puntos)

Se recuerda que:
El puntaje mínimo de aprobación es 60 puntos.

$$\int xsen(ax)dx = \frac{sen(ax)}{a^2} - \frac{xcos(ax)}{a} + K$$

$$\int x^2 sen(ax)dx = \frac{2x.sen(ax)}{a^2} - \left(\frac{x^2}{a} - \frac{2}{a^3}\right) cos(ax) + K$$