Ecuaciones Diferenciales
Soluciones examen julio

28 de julio de 2012.

1. Para cada $t \geq 0$, $v_t(x) = u(x,t) \in C([0,\pi])$ y cumple $v_t(0) = v_t(\pi)$. Buscamos solución de la forma

$$u(x,t) = v_t(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k(t)\operatorname{sen}(kx)$$

Observar que si esta serie converge, satisface automáticamente las condiciones de contorno.

$$u_t(x,t) = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k'(t)\operatorname{sen}(kx)$$

y

$$u_{xx}(x,t) = \sum_{k=1}^{+\infty}(-k^2)b_k(t)\operatorname{sen}(kx)$$

Luego de sustituir en la ecuación resulta, (1) $b_k'(t) = -k^2 b_k(t)$, $k = 1, 2, \ldots$ Imponemos las condiciones iniciales:

$$f(x) = u(x,0) = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k(0)\operatorname{sen}(kx)$$

esta es la serie de Fourier de la extensión impar de f, entonces

$$(2)\ b_k(0) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(y)\operatorname{sen}(ky)\,dy,\ \ k = 1, 2, \ldots$$

La única solución de (1) con las condiciones iniciales (2) es

$$b_k(t) = \left(\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(y)\operatorname{sen}(ky)\,dy\right)e^{-k^2 t}$$

entonces

$$u(x,y) = \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(y)\operatorname{sen}(ky)\,dy\right)\operatorname{sen}(kx)e^{-k^2 t}$$

2. *a*) Sea $f(x,y) = (\alpha y + \alpha xy - y^2, \alpha x + x^2 - xy^2)$. La matriz diferencial de f es

$$\begin{pmatrix} \alpha y & \alpha + \alpha x - 3y^2 \\ \alpha + 2x - y^2 & -2xy \end{pmatrix}$$

Cuando evaluamos en el punto $(0,0)$ resulta,

$$D = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}$$

Como D tiene un valor propios con parte real positiva (α), resulta que $(0,0)$ es I. en el no lineal.

b) Hay que resolver el sistema

$$\begin{cases} y(1+x-y^2)=0 \\ x(1+x-y^2)=0 \end{cases}$$

Las soluciones de este sistema son: los puntos, $(0,0)$, $(0,1)$, $(0,-1)$ y $(-1,0)$ y la curva $y^2=1+x$.

3. *a*) Ver teórico.

   b) i) Soluciones estacionarias: $x(t)=\pm 1$. Las demás soluciones se obtienen de resolver:

$$\dot{x}=\frac{x^2-1}{2}$$

si y sólo si

$$\frac{\dot{x}}{x^2-1}=\frac{1}{2}$$

Luego integramos de ambos lados entre 0 y t y resulta,

$$\int_c^{x(t)} \frac{1}{2}\frac{1}{u^2-1}\,du=\frac{1}{2}t$$

Aplicando el método de fracciones simples para resolver la integral resulta,

$$x(t)=\frac{(c-1)e^t+c+1}{-(c-1)e^t+c+1}$$

ii) Los puntos críticos son $x=\pm 1$, mirando el diagrama de fase se cumple que $x=1$ es inestable y $x=-1$ es asintóticamente estable.

Figura 1: