Ecuaciones Diferenciales
Soluciones examen febrero

22 de febrero de 2012.

1. *a*) Ver Teórico.

   b)
$$V(u,v) = \frac{1}{2}v^2 + \int_0^u f(t)\,dt,$$
   entonces $\dot{V}(u,v) = vv' + f(u)u' = v(-f(u) - bv) + f(u)v = -bv^2$. $\dot{V}$ es semidefinida negativa. Para que V sea definida positiva alcanza con pedir que en algún entorno de $u = 0$ el signo de f sea mayor a 0 en los positivos y menor a 0 en los negativos.

   c) El lineal asociado es
$$\begin{cases} u' = & v \\ v' = & -f'(0)u - bv \end{cases}$$
   Como los valores propios de la matriz
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -f'(0) & -b \end{pmatrix}$$
   tienen parte real negativa (ya que $b > 0$ y $f'(0) > 0$) resulta que $(0,0)$ es A.E. en el no lineal.

2. *a*) Los valores própios de A son 1, 3 y -2. Los vectores própios correspondientes son:
$$\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   b) La solución es $X = e^{At}X(0)$.

   c) Sale del estudio de los valores própios de A que el origen es inestable.

3. *a*) Si $u = f(v)$, $u_{xx} = f''(v)v_x^2 + f'(v)v_{xx}$ y $u_{yy} = f''(v)v_y^2 + f'(v)v_{yy}$, entonces la ecuación (B) resulta: $f'(v)(v_{xx} + v_{yy}) + (f''(v) + f'^2(v))(v_x^2 + v_y^2)$.

   b) (B) es equivalente a $v_{xx} + v_{yy} = 0$ si y sólo si $f''(v) + f'(v) = 0$, con $f(0) = 0$ y $f'(0) = 1$. Esta ecuación tiene como solución $f(v) = \log(1 + v)$.

   c)
$$v(x,y) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{-4}{n^3\pi} \left(\frac{(-1)^n - 1}{e^{-n\pi} - e^{n\pi}} \right) (e^{-ny} - e^{ny}) \operatorname{sen}(nx)$$
   Luego la solución buscada es $u(x,y) = \log(1 + v(x,y))$.