**Ecuaciones Diferenciales**
**Examen febrero**

22 de febrero de 2012.

| No. examen | Apellido y nombre | Firma | Cédula |
|---|---|---|---|
| | | | |

1. *a*) Demostrar el primer teorema de Lyapunov.
   *b*) Sea la ecuación
$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -by - f(x) \end{cases}$$
   con $b > 0$, y $f$ continua tal que $f(0) = 0$. Dar condiciones en $f$ para que
$$V(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + \int_0^x f(u)\,du,$$
   sea una función de Lyapunov para el punto de equilibrio $(0, 0)$.
   *c*) Suponer ahora que $f$ es de clase $C^1$ con $f'(0) > 0$. Mostrar que no vale aplicar el teorema de Lyapunov para probar que el punto $(0, 0)$ es asintóticamente estable y demostrar la estabilidad asintótica de dicho punto utilizando otros métodos.
2. *a*) Hallar la matriz exponencial, $e^{At}$, para
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$
   *b*) Resolver $X' = AX$ con
$$X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$
   *c*) Estudiar la estabilidad de la solución hallada.
3. Consideremos la ecuación $(A)\, u_{xx} + u_{yy} + u_x^2 + u_y^2 = 0$.
   *a*) Hacer el cambio de variable $u(x, y) = f(v(x, y))$ con $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, de clase $C^2$. Sea $(B)$ la ecuación obtenida.
   *b*) Hallar $f$ tal que $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ para que $(B)$ sea equivalente a $v_{xx} + v_{yy} = 0$.
   *c*) Hallar la solución de $(A)$ en $0 < x < \pi$, $0 < y < \pi$ tal que
$$\begin{cases} u(0, y) = u(\pi, y) = 0 \\ u(x, 0) = 0 \\ u(x, \pi) = \log[1 + x(\pi - x)] \end{cases}$$

Se recuerda que:

$\int xsen(ax)dx = \frac{sen(ax)}{a^2} - \frac{x.cos(ax)}{a}$

$\int x^2 sen(ax)dx = \frac{2x}{a^2} sen(ax) - \left(\frac{x^2}{a} - \frac{2}{a^3}\right) cos(ax)$.