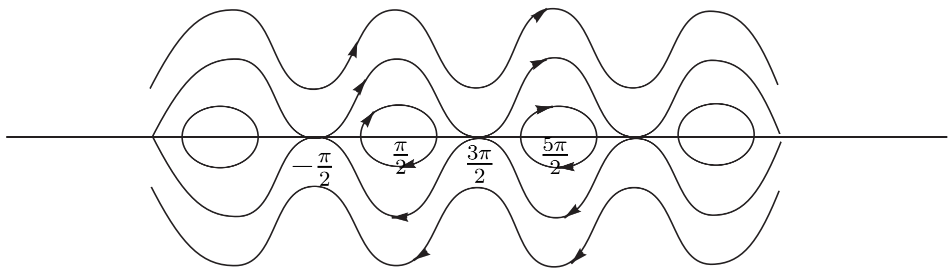
Ejercicio 1. a) $\dot{H}(x,y) = y\dot{y} - cos(x)\dot{x} = ycos(x) - cos(x)y = 0$.
b) ver figura



c) De la figura se concluye que los puntos de la forma $-\pi/2 + 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$, son inestables y los de la forma $\pi/2 + 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$, son estables pero no asintóticamente estables.

Ejercicio 2. a) ver http://imerl.fing.edu.uy/ecdif/archivos/curso2012/17815924.pdf páginas 179-180.
b) ver http://imerl.fing.edu.uy/ecdif/archivos/curso2012/17815924.pdf páginas 183-184.

Ejercicio 3. a) Hay que resolver $b_k = 2/\pi \int_0^\pi f(y)sen(ky)dy$, haciendo cuentas queda

$$b_k = \frac{4}{\pi}\frac{sen(k\frac{\pi}{2})}{k^2}$$

b) Buscamos soluciones de la forma $u(x,y) = X(x).Y(y)$. Entonces las ecuaciones que quedan son: (a) $Y'' - \lambda Y = 0$ con $Y(0) = Y(\pi) = 0$.
(b) $X'' + \lambda X = 0$ con $X(\pi) = 0$.
La solución de la ecuación (a) es $Y(y) = A_k sen(ky)$, donde $\lambda = -k^2$. La solución de la ecuación (b) es $X(x) = B_k(-e^{-2k\pi}.e^{kx} + e^{-kx})$. Por lo tanto la solución que proponemos es

$$u(x,y) = \sum_{k=1}^{+\infty} C_k sen(ky)(-e^{-2k\pi}.e^{kx} + e^{-kx}).$$

Como $u(0,y) = f(y)$ entonces se tiene que cumplir que $\sum_{k=1}^{+\infty} C_k sen(ky)(1-e^{-2k\pi}) = f(y)$. De donde

$C_k(1 - e^{-2k\pi}) = b_k$, donde b_k es el hallado en (a).

c) Es fácil probar que u cumple con:

- $u(x,0) = u(x,\pi) = 0, \quad \forall x \in [0,\pi]$.
- $u(\pi,y) = 0$, $\forall y \in [0,\pi]$.
- $u(0,y) = f(y)$, $\forall y \in [0,\pi]$.

Lo difícil es probar que $u_{xx} + u_{yy} = 0$. Sea $u_k = b_k sen(ky)(-e^{-2k\pi}.e^{kx} + e^{-kx})$, si probamos que

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\sum u_k = \sum \frac{\partial^2 u_k}{\partial x^2} \text{ y que } \frac{\partial^2}{\partial y^2}\sum u_k = \sum \frac{\partial^2 u_k}{\partial y^2} \tag{1}$$

entonces conlcuimos que

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}u + \frac{\partial^2}{\partial y^2}u = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\sum u_k + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\sum u_k \overset{(1)}{=} \sum \frac{\partial^2 u_k}{\partial x^2} + \sum \frac{\partial^2 u_k}{\partial y^2}$$

$$\sum \left(\frac{\partial^2 u_k}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_k}{\partial y^2} \right) = 0.$$

Por lo tanto solo basta probar las igualdades de (1).

Veamos que dado un punto $(x_0, y_0) \in (0,\pi) \times (0,\pi)$ si tomamos $\delta > 0$ tal que $\overline{U} = \overline{(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \times (y_0 - \delta, y_0 + \delta)} \subset (0,\pi) \times (0,\pi)$ entonces las expresiones

$$\sum u_k, \quad \sum \frac{\partial u_k}{\partial x}, \quad \sum \frac{\partial^2 u_k}{\partial x^2}, \quad \sum \frac{\partial u_k}{\partial y} \text{ y } \sum \frac{\partial^2 u_k}{\partial y^2}$$

converge uniformemente en $\overline{U}$. La justificación es análoga en todos los casos.

Observar que $x_0 - \delta > 0$ y $2\pi - (x_0 - \delta) > 0$.

Sea ahora $(x, y) \in \overline{U}$.

Entonces,

$$|u_k(x,y)| \leq \frac{|b_k|(e^{-kx} + e^{-2k\pi}e^{kx})}{1 - e^{-2k\pi}} \leq \frac{|b_k|e^{-k(x_0-\delta)}}{1 - e^{-2k\pi}} + \frac{|b_k|e^{-2k\pi}e^{k(x_0+\delta)}}{1 - e^{-2k\pi}}$$

Además los coeficientes b_k están acotados, entonces existe $M > 0$ tal que $|b_k| < M$.

Como las series $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{Me^{-k(x_0-\delta)}}{1-e^{-2k\pi}}$ y $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{Me^{-2k\pi}e^{k(x_0+\delta)}}{1-e^{-2k\pi}}$ son convergentes, aplicando el lema de Weierstrass tenemos que la serie $\sum_{k=1}^{+\infty} u_k$ converge uniformemente en $\overline{U}$. Anlogamente, se demuestra la convergencia uniforme de las otras series. Luego, aplicando el Teorema 5 página 38 (ver http://imerl.fing.edu.uy/ecdif/archivos/curso202012/17815924.pdf) tenemos justificadas las igualdades enunciadas en (1).