Ecuaciones Diferenciales
Examen diciembre

15 de diciembre de 2012.

No. Examen	Apellido y nombre	Firma	Cédula

1. Sea la ecuación
$$x' = y$$
$$y' = cos(x)$$
   a) Probar que $H(x,y) = 1/2y^2 - sen(x)$ es una preintegral. (5 puntos)
   b) Dibujar las curvas de nivel de H. (15 puntos)
   c) Estudiar la estabilidad de los puntos de equilibrio.(10 puntos)

2. *a*) Sea (M,d) un espacio métrico completo y $T : M \to M$ una función que cumple que existe $0 < \lambda < 1$ tal que
$$d(T(x),T(y)) \leq \lambda d(x,y), \quad \forall x,y \in M.$$
   Probar que existe un único $x_0 \in M$ tal que $T(x_0) = x_0$.(10 puntos)
   b) Sean:
   - $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, con f de clase C^1,
   - $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$,
   - $M = \{\varphi \text{ tal que } \varphi : (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \to B(x_0, \varepsilon), \text{ con } \varphi \text{ continua}\}$,
   - $C = \{\varphi \text{ tal que } \varphi : (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \to \mathbb{R}^n, \text{ con } \varphi \text{ continua}\}$,
   - la función $T : M \to C$ tal que
$$T(\varphi)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))ds.$$
   Probar que existen $\delta > 0$, $\varepsilon > 0$ y $\lambda > 0$ con $0 < \lambda < 1$ tales que $T(M) \subset M$ y que $d(T(x),T(y)) \leq \lambda d(x,y)$, $\forall x,y \in M$. (15 puntos)

3. *a*) Sea $f : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ tal que
$$f(y) = \begin{cases} y & \text{si } y \in [0,\pi/2] \\ \pi - y, & \text{si } y \in [\pi/2,\pi] \end{cases}$$
   Hallar la serie de Fourier de tipo senos de f.(10 puntos)
   b) Encontrar una expresión en serie de funciones para la solución de la ecuación:
   - $u_{xx} + u_{yy} = 0$, para $0 < x < \pi$, $0 < y < \pi$.
   - $u(x,0) = u(x,\pi) = 0, \quad \forall x \in [0,\pi]$.
   - $u(\pi,y) = 0$, $\forall y \in [0,\pi]$.
   - $u(0,y) = f(y)$, $\forall y \in [0,\pi]$. (10 puntos)

   c) Probar que la serie de funciones hallada es solución de la ecuación. Enuciar los resultados que se utilicen.(15 puntos)

Se recuerda que:
$$\int x sen(ax)dx = \frac{sen(ax)}{a^2} - \frac{x cos(ax)}{a} + K$$

El puntaje mínimo de aprobación es 55 puntos.