1. En a, ver teórico. En b, basta mirar las gráficas de las funciones $y = -x^3$ e $x = y^3$ y ver que se cortan sólo en el origen. El sistema linealizado en el origen es $\dot{x} = y$, $\dot{y} = -x$, cuyas órbitas en el diagrama de fase se ven como circunferencias concéntricas al origen viajando en sentido horario. En particular, el origen es estable en el sistema linealizado. Sin embargo, el origen es inestable en el sistema original. Para verlo, podemos tomar $V = x^2 + y^2$ en cuyo caso $\dot{V} = 2(x^4 + y^4)$. Observe que V verifica las hipótesis de Cetaev en el dominio $R^2 - (0, 0)$. Así, el origen es inestable.

2. *a*) Ver teórico.

   b) Observemos primero que el sistema esta en las hipótesis del teorema de Picard, esto se debe a que el campo es $\mathcal{C}^1$ respecto a x y es continuo respecto a (x, t). Por lo tanto solo verificaremos que es solución y por unicidad esta sera la única solución maximal definida en todo $\mathbb{R}$ de esa forma.

   $$x(t) = e^{\alpha t}u \Rightarrow x^{'}(t) = \alpha e^{\alpha t}u$$

   Si es solución se verifica que,

   $$\alpha e^{\alpha t}u = Ae^{\alpha t}u + e^{\alpha t}b \Leftrightarrow \alpha u = Au + b \Leftrightarrow (\alpha I - A)u = b$$

   entonces para que sea solución debe existir un vector u que verifique la ecuación anterior, lo que es equivalente a que la matriz $(\alpha I - A)$ tenga rango completo o que α no sea valor propio de A ya que implica que $N(\alpha I - A) = \emptyset$. En estas condiciones $u = (\alpha I - A)^{-1}b$.

   c) La ecuación se puede escribir de la forma,

   $$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^{'} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

   en donde $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\alpha = 2$ y $b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, por lo tanto $(\alpha I - A) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ y $(\alpha I - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ que es ella misma. Entonces $u = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ y $x_P(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Hasta ahora tenemos una solución particular, además sabemos que la solución general de un sistema de la forma anterior se puede escribir como $x_G = x_H + x_P$ en donde x_H es la solución de la homogénea. Por lo tanto debemos hallar dicha solución la cual corresponde a la de un sistema lineal a coeficientes constantes y es $x_H = e^{At}x_0$. A tiene valores propios $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 3$, entonces $A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} P^{-1}$ en donde las columnas de P son los valores propios correspondientes. Finalmente la solución del problema es

   $$x_G(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

   .

3. En la parte a, sustituyendo en la ecuación, ajustamos f y g para que u_0 sea solución de la ecuación:

   $$u_0(x, t) = -x(1 + sen(t))$$

   En la parte b, considere la solución $\hat{u} = u - u_0$, siendo u solución de la ecuación con las condiciones de borde descritas en la letra. Las nuevas condiciones de borde de $\hat{u}$ son

   $$\hat{u}(x, 0) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{sen(nx)}{n^4}$$

   $$\hat{u}_t(x, 0) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{sen(nx)}{n^3}$$

   $$\hat{u}(0, t) = 0$$

   $$\hat{u}(\pi, t) = -\pi(1 + sen(t))$$

Con el método de separación de variables concluimos que formalmente, en principio, la solución $\hat{u}$ de la ecuación con las condiciones de borde anteriores es de la forma:

$$\hat{u}(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} sen(nx)[a_n cos(nt) + b_n sen(nt)]$$

y ajustando a_n y b_n tenemos

$$\hat{u}(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{sen(nx)}{n^4}[cos(nt) + sen(nt)]$$

Finalmente,

$$u(x,t) = -x(1 + sen(t)) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{sen(nx)}{n^4}[cos(nt) + sen(nt)]$$

es la solución de la ecuación con las condiciones de borde originales.

En la parte c, basta con derivar dos veces respecto a t o x la solución formal:

$$u(x,t) = \ldots - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{sen(nx)}{n^2}[cos(nt) + sen(nt)]$$

que converge uniformemente por Weierstrass a una función continua. En particular, u existe y es solución de la ecuación.