Examen de Ecuaciones Diferenciales.

29 de julio de 2011.

No. de examen	Apellido y nombre	Firma	Cédula

En todos los casos se deben justificar las respuestas, haciendo referencia a los resultados utilizados.

1. *a*) Enunciar y demostrar el teorema de Cetaev.

   b) Considere el siguiente sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} = x^3 + y \\ \dot{y} = -x + y^3 \end{cases}$$

   1) Probar que tiene un único punto de equilibrio,
   2) Estudiar la estabilidad del sistema linealizado en dicho punto de equilibrio,
   3) Encontrar una función de Lyapunov V para ese punto de equilibrio de la forma $V(x, y) = f(x) + g(y)$ y concluir la inestabilidad del punto de equilibrio para el sistema original.

2. *a*) Sean $A : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_n$ y $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ funciones continuas. Probar que las soluciones maximales de una ecuación lineal $\dot{x} = A(t)x + b(t)$ están definidas para todo $t \in \mathbb{R}$ (Recordar que $\mathcal{M}_n$ representa el espacio vectorial normado de las matrices $n \times n$ a coeficientes reales y su norma verifica $\|Ax\| \leq \|A\|\|x\|$, con $A \in \mathcal{M}_n$ y $x \in \mathbb{R}^n$).

   b) Dada la matriz A, probar que si α no es valor propio de A, entonces la ecuación $x' = Ax + e^{\alpha t}b$ tiene una única solución de la forma $x(t) = e^{\alpha t}u$ con $u \in \mathbb{R}^n$. Calcular u en función de A, b y α.

   c) Resolver el sistema

$$\begin{cases} x' = 2x + y + e^{2t} \\ y' = x + 2y - e^{2t} \end{cases}$$

3. Se considera la ecuación

$$u_{tt}(x, t) - u_{xx}(x, t) = x \sin t, \quad (x, t) \in D = (0, \pi) \times \mathbb{R}.$$

   a) Hallar la solución particular $u_0(x, t)$ de la forma $f(x) \sin t + g(x)$ tal que las funciones f y g satisfacen $f(0) = g(0) = 0$, $f'(0) = -1$ y $g'(0) = -1$.

   b) Encontrar una solución formal u de la ecuación en D que satisfaga las condiciones

$$u(x, 0) = -x + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n^4}, \ x \in [0, \pi]$$

$$u_t(x, 0) = -x + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n^3}, \ x \in [0, \pi]$$

$$u(0, t) = 0, \ t \in \mathbb{R}$$

$$u(\pi, t) = -\pi \sin t - \pi, \ t \in \mathbb{R}.$$

   c) Probar que la solución formal hallada en la parte anterior es efectivamente solución del problema.