Solución del Examen de Ec.Dif., Feb. de 2011

Ej.1 En la parte a, es claro que verifica la primera ecuación. Veamos la segunda:

$$\begin{aligned}
\dot{y} &= -\frac{1}{2}c^3[sen^2 + (sen^4 + 4cos^2)^{\frac{1}{2}}]sen \\
&= -\frac{1}{2}c^3[sen^2 + ((1-cos^2)^2 + 4cos^2)^{\frac{1}{2}}]sen \\
&= -\frac{1}{2}c^3[sen^2 + (1-2cos^2 + cos^4 + 4cos^2)^{\frac{1}{2}}]sen \\
&= -\frac{1}{2}c^3[sen^2 + (1+2cos^2 + cos^4)^{\frac{1}{2}}]sen \\
&= -\frac{1}{2}c^3[sen^2 + (1+cos^2)]sen \\
&= -c^3 sen
\end{aligned}$$

Para la parte b, observe que las órbitas de las soluciones de la parte a son una familia de elipses; por medio de cuentas se verifica que por todo punto del plano pasa una de ellas. Supongamos que existe otra solución φ tal que $\varphi(t) = (x, y)$ para algún t. Por la observación anterior, (x, y) está contenido en alguna de las órbitas mencionadas. Debido a que el sistema es autónomo, existen parámetros c y d tales que la solución de la parte a evaluada en t es (x, y). Asumiendo unicidad, tenemos que φ es la restricción de alguna solución (maximal) de la parte a.

En la parte c, es claro que el origen es punto de equilibrio estable y cualquier otra solución tiene su órbita a una distancia mayor a cero de éste por lo que no es asintóticamente estable.

Ej.2 La serie de Fourier es única por lo que la sugerencia es la serie de Fourier. Para la parte siguiente, luego de hacer separación de variables, tenemos que

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n cos(nx) e^{-n^2 t}$$

Ajustando los coeficientes con la serie de Fourier de la parte anterior, tenemos la solución

$$u(x,t) = \frac{65}{2}(1 + cos(2x)e^{-4t})$$

Ej.3 La región $y = 0$ es una variedad invariante del sistema; es decir, $(x(t), 0)$ tal que $\dot{x} = x^2$, es una solución. Entonces, dada una condición inicial de la forma $(\varepsilon, 0)$ con ε positivo, el sistema evoluciona hacia la derecha por lo que claramente el origen no es estable.

Para la parte b, observe que V es constante en las órbitas; es decir

$$\frac{d}{dt}V(x(t), y(t)) = 0$$

Así, las órbitas están contenidas en las curvas de nivel de V. Veamos la curva de nivel $V(x, y) = c$:

$$\frac{x^2 + y^2}{y} = c$$

implica que

$$x^2 + (y - \frac{c}{2})^2 = (\frac{c}{2})^2$$

siempre que $y \neq 0$; es decir, circunferencias sin un punto.

Vemos entonces que las órbitas de la región $y \neq 0$ (circunferencias sin un punto) están acotadas por lo que, por salida de compactos, su intervalo maximal es toda la recta real. La región invariante $y = 0$ posee tres órbitas: el origen (punto de equilibrio), la derecha y la izquierda. El origen posee intervalo maximal la recta real mientras que las otras dos regiones tienen intervalos del tipo $(-\infty, a)$ y $(a, +\infty)$ respectivamente con a finito. Esto es fácil de ver ya que, para la órbita de la derecha por ejemplo, estar acotada inferiormente implica, por salida de compacos, que su intervalo de definición se extiende a $-\infty$ mientras que la convergencia de la integral

$$\int_{x_0}^{+\infty} \frac{dx}{x^2} < +\infty$$

implica que el intervalo de definición se extiende hasta un valor finito de t. Análogo con la órbita izquierda.