Examen de Ecuaciones Diferenciales.

4 de febrero de 2011.

No. de examen	Apellido y nombre	Firma	Cédula

En todos los casos se deben justificar las respuestas, haciendo referencia a los resultados utilizados.

1. Considere el siguiente sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\frac{1}{2}\left[x^2 + (x^4 + 4y^2)^{1/2}\right] x. \end{cases}$$

   a) Demuestre que:

$$\varphi(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c\,\text{sen}(ct + d) \\ c^2 \cos(ct + d) \end{pmatrix}$$

   es una solución del sistema para cualquier elección de constantes c, d reales.

   b) Acepte que se verifica la unicidad de la solución para cada condición inicial. Pruebe que las soluciones de la parte anterior son todas.

   c) Demuestre que el origen es un punto de equilibrio estable pero no asintóticamente estable.

   d) Bosquejar el diagrama de fase.

2. *a*) Hallar la serie de Fourier de $f(x) = \cos^2(x)$ en $[-\pi, \pi]$. Sug: Puede ser útil recordar la igualdad $\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}$.

   b) Resolver el siguiente problema de ecuación del calor:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & \\ u(x,0) = 65\cos^2(x) & 0 \leq x \leq \pi \\ u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0 & t > 0 \end{cases}$$

3. Considere el siguiente sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 - y^2 \\ \dot{y} = 2xy. \end{cases}$$

   a) Estudiar estabilidad del origen.

   b) Se considera la función V definida en su mayor subconjunto del plano posible y dada por

$$V(x,y) = \frac{x^2 + y^2}{y}.$$

   Utilizarla con la finalidad de bosquejar el diagrama de fase del sistema original.

   c) Estudiar el intervalo maximal de las soluciones del sistema.