Ecuaciones Diferenciales
Soluciones examen diciembre

16 de diciembre de 2011.

1. *a*)

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(x+2\pi)\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\,dx = 2\pi$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos(nx)\,dx = 0$$

$$b_n = \frac{-2}{n}(1-(-1)^n) + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\,\mathrm{sen}(nx)\,dx = \frac{-2}{n}$$

Entonces, la serie de Fourier de f es,

$$\pi - 2\sum_{n=1}^{n=+\infty}\frac{\mathrm{sen}(nx)}{n}$$

b) Tomando $x = \frac{\pi}{2}$ se obtiene,

$$\sum_{n=1}^{n=+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} = \frac{\pi}{4}$$

2. *a*) El sistema es lineal. Su polinomio caracteristico es $\lambda^2+2\lambda-3-2\alpha$ y sus raices son, $-1\pm\sqrt{2}\sqrt{2+\alpha}$.
si $\alpha > \frac{-3}{2}$, $(0,0)$ es I, si $\alpha < \frac{-3}{2}$ $(0,0)$ es A.E y si $\alpha = \frac{-3}{2}$ $(0,0)$ es E.

b) El sistema es lineal y su polinomio caracteristico es $\lambda^2-\lambda+3$. El $(0,0)$ es inestable.

3. *a*) La solución de la ecuación $g''+y^2=0$ es $g(y) = \frac{-y^4}{12}+C_1y+C_2$. Como $g(0)=1$, $C_2 = 1$ y como $g(\pi)=0$, $C_1 = -\frac{1}{\pi}+\frac{\pi^3}{12}$.

b) Hacemos el cambio de variable sugerido y el problema se reduce a rsolver $v_{xx}(x,y)+v_x(x,y) = v_{yy}(x,y)$. Si buscamos solución de la forma $v(x,y) = X(x)Y(y)$, resulta,

$$(X''(x)+X'(x))Y(y) - X(x)Y''(y) = 0,$$

$$\frac{X''(x)+X'(x)}{X(x)} = \frac{Y''(y)}{Y(y)} = \lambda$$

El problema se reduce a resolver dos ecuaciones diferenciales:

$$X''(x)+X'(x)-\lambda X(x) = 0,$$

$$Y''(y)-\lambda Y(y) = 0$$

El polinomio característico de la segunda ecuación es, $\mu^2-\lambda = 0$, por lo tanto, $Y(y) = B\cos(\sqrt{\lambda}y) + C\,\mathrm{sen}(\sqrt{\lambda}y)$. Como $X(x)Y(0) = 0$, $Y(0) = 0$, entonces $B=0$ y resulta $Y(y)=C\operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}y)$. Luego, $X(x)Y(\pi)=0$, entonces $\operatorname{sen}\sqrt{\lambda}\pi=0$ entonces $\sqrt{\lambda}\in\mathbb{N}$. Entonces, $Y(y)=C_k\operatorname{sen}(ky)$.

La otra ecuación tiene polinomio característico $\mu^2+\mu+\lambda^2=0$ y sus raíces son $-\frac{1}{2}\pm\frac{i\sqrt{4k^2-1}}{2}$ entonces tiene solución de la forma,

$$X(x)=e^{-\frac{1}{2}t}\left(A\cos\left(\sqrt{\frac{4k^2-1}{2}t}\right)+B\operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{4k^2-1}{2}t}\right)\right)$$

Como $X(0)=0$, $A=0$. Vanos a proponer solución de la forma $v=\sum_{k=1}^{+\infty}v_k$, donde

$$v_k(x)=B_k\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{4k^2-1}}{2}x\right)e^{-\frac{1}{2}x}\operatorname{sen}(ky)$$

$v_x(0,y)=-B_k(\frac{\sqrt{4k^2-1}}{2})\operatorname{sen}(ky)$, entonces debe ser,

$$\sum_{k=1}^{+\infty}B_k\left(-\frac{\sqrt{4k^2-1}}{2}\right)\operatorname{sen}(ky)=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\operatorname{sen}(ny)}{n^4}$$

Calculando la serie de Fourier llegamos a que

$$v(x,y)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4}x^n\operatorname{sen}(ny)$$